SHUXUE DASHI DE
CHUANGZAO YU SHIWU

数学大师的创造与失误

吴振奎
吴　健　著
吴　旻

天津教育出版社
TIANJINJIAOYUCHUBANSHE

数学大师的创造与失误

SHUXUEDASHIDECHUANGZAOYUSHIWU

责任编辑：董 刚
装帧设计：董 建

ISBN 7-5309-3759-6
G·3193 定价：16.00元

数学大师的创造与失误

吴振奎
吴　健
吴　旻　著

SHUXUE DASHI DE CHUANGZAO YU SHIWU

天津教育出版社
TIANJIN JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目（CIP）数据

数学大师的创造与失误 / 吴振奎著. —天津：天津教育出版社，2004.1
ISBN 7-5309-3759-6

Ⅰ.数… Ⅱ.吴… Ⅲ.①数学-普及读物②数学家-生平事迹-世界 Ⅳ.①01-49②K816.11

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第120593号

数学大师的创造与失误

出 版 人 肖占鹏

作　　者 吴振奎 吴 健 吴 雯
责任编辑 董 刚
装帧设计 董 建

出版发行 天津教育出版社
天津市和平区西康路35号
邮政编码：300051
经　　销 新华书店
印　　刷 天津美术印刷厂
版　　次 2004年1月第1版
印　　次 2004年1月第1次印刷
规　　格 32开（850×1168毫米）
字　　数 267千字
插　　页 2
印　　张 11.75
印　　数 1-3000

书　　号 ISBN 7-5309-3759-6/G·3193
定　　价 16.00元

前　言

科学的发现往往经历准备、酝酿、领悟和完成这四个阶段，其中首末两个阶段是有意识的，而中间的两个阶段则相反，数学也不例外.

数学家的发明、发现，往往是他们阅读演算、观察分析、归纳总结、开拓创新的结果.当然，前期的准备与铺垫，也使得他们的某些发现(或许不是全部)竟出现在瞬间，或出现于偶然.有人称之谓“灵感”，有人说它是“运气”，其实是“灵犀点通”、“水到渠成”所然.或许正是这些瞬间、偶然，才使得数学家把我们带入别开生面的另一番天地，去领略数学花园中的奇葩异草，体味数学的神奇与魅力，发现数学美，认识数学美，理解数学美，欣赏数学美.

纵然“事事留心皆学问”，但别忘了你仍须留心在意、观察捕捉，此外还要记住冰冻三尺非一日之寒的道理.

金无足赤，人无完人.

人既皆可为舜尧，人也都会犯错误，纵然是学界泰斗，哪怕是科坛巨匠.数学家们当然也不例外.

俗称“老虎也会打盹”，数学大师们的失误原非本意，只是不够小心.他们的失误常涉及两个方面：一是他们对某些未知结论的冒然引申与判断；二是对他人正确思想的非议与否定(他们或许是无意中、或许是不理解、或许……)，这其中有些是令人痛心

的,原因在于他们有着大师的声望,故往往也使其错误更具欺骗性,也更难被人识认与道破,因而更具杀伤力,代价也更加沉重。这是一种悲哀,又是一种无奈.

但另一方面,正如美国数学家哈莫斯(Halmos,P.R.)所言:"数学家X的一个漏失或一个误述,正好是数学家Y所需要用以发现真理的东西."

数学有时真的是借此东风.这样的例子数学史上还少吗?

我们将上述两方面资料汇集,无非是想从中学习一些道理与方法——做学问的道理与方法;再者我们也许可从中体味数学的魅力与美妙,悟出数学乃至整个科学发展的坎坷与艰辛,品鉴数学的严谨与纯真,容不得半点差错与丝毫瑕疵的缘由.

"敏于事而慎于言","大胆的假设,小心的求证",在数学研究中亦应如此.

顺便讲一句:本书某种意义上讲应是拙作《名人·趣题·妙鲜》的姊妹篇.

2003年初春

目　　录

分形问题的思考
(代序)

“分形”作为一门崭新的数学分支刚刚诞生,便呈现勃勃生机——它在诸多领域中的应用便是明证,它在展现其自身风采的同时,也流溢着它无尽的魅力.

“分形”的出现绝非偶然,它当然有着深刻的数学背景,但慧眼识金的发明者如何剥离砂石、觅得真宝?它又给我们什么启示?这一切正是我们所关心的.

刚刚过去的20世纪,数学的发展可谓突飞猛进.一项项崭新的概念被提出;一个个划时代的成果被掘拓,这其中为适应数学发展而创立的新学科,几乎影响着全部数学乃至人类生活.

模糊数学诞生的背景蕴含着计算机(确切地讲为人工智能)发展的需求,但它的出现却使得家电产品引发一场革命;分形理论的创立原本是想从大千世界中奇形怪状、扑朔迷离的纷杂事件中找出其隐蔽的内在规律,如今其研究已遍及诸多科技领域.

加之诸如集合论、解析数论(比如费尔马(Fermat,P.de)大定理的获证)、群论、拓扑……等等诸学科的发展使得数学乃至整个科学世界面貌为之一新.

20世纪上半叶科学在向纵深发展之际,使得分支越来越多、越来越细;而后半世纪,则是学科互相渗透、彼此结合地交叉发展.

试想,数学中某些貌似风马牛不相及的分支的诞生、发展过程有无内在渊源?它又能给人们何种启示?我们还是先来看一下事实(当然这儿述及的仅是冰山一角).

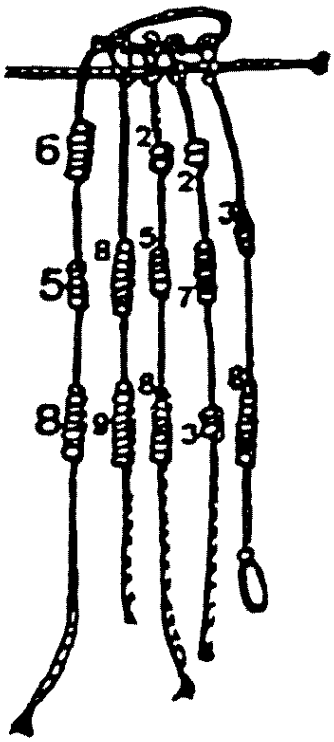
1.数的扩充

人们对于数的认识经历了漫长的历程.

文字产生之前的远古时期,数的概念已经形成,当时人们用实物(石子、树棍、竹片、贝壳等)表示数,此外还用绳结记数,我国古籍《易经》上就有结绳记数的记载(上古结绳而治,后世圣人,易之以书契),在国外亦然.

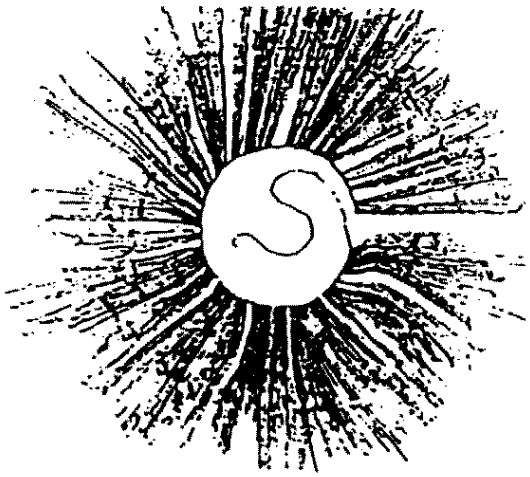
我国古代甲骨文中的""字,左边是打结的绳,右边是一只手,表示古人用结绳记数

另一种绳结

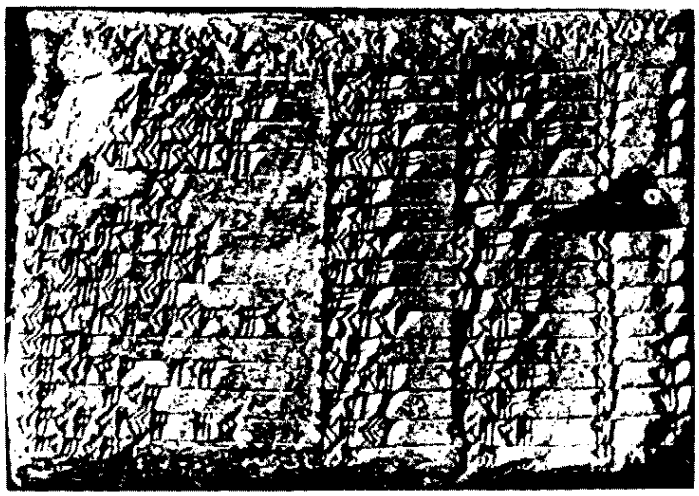


现藏美国自然史博物馆的印加记数基普

西班牙人描绘的秘鲁人结绳



藏于巴黎人类博物馆
的秘鲁印第安人绳法



现藏美国哥伦比亚大学图书馆的古代巴比伦的泥板文书(记数表格)

当然,人们还用泥板以及刻骨记数.

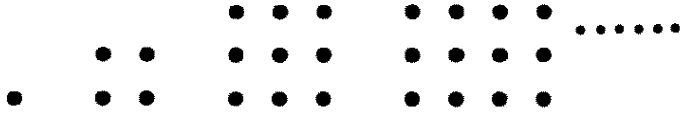
现藏布鲁塞尔博物馆的乌干达出土的刻痕记数的一根骨头

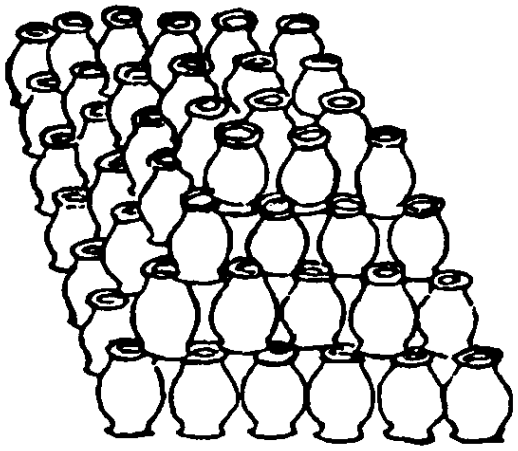
我国出土的一块甲骨及其上的数目字

这些用数形结合去对抽象“数”的诠释或描述的做法,曾启发毕达哥达斯(Pythagoras)学派的学者们用“形数”概念去研究数的性质,且至今仍影响着人类的思维(比如代数性质的几何解释等正是这种思维的延伸).

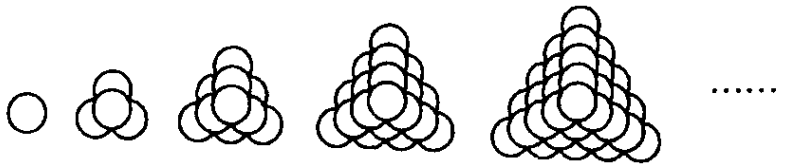
三角数

四角数





我国宋代沈括发明“隙积术”，考虑了平头楔形中有空隙的酒坛堆垛问题等的计算，其中正方垛给出相当于 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 的公式



我国元代朱世杰精心分析了堆垛问题，给出底层每边由 $1\sim n$ 个 n 只三角垛集合成的“撒星形”，积垛相当于今天的计算公式

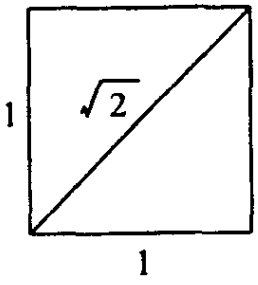
$$s=1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\left[1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

由于分配(当一件或 n 件物品多人去分时)而引出了“分数”概念，它的出现是数学史上令人振奋的一件大事.

古埃及人就研究过分子是 1 的分数(单位分数)的诸多性质.

分数在我国出现的年代不详，但在不少古籍如《管子》、《墨子》等书中已有记载.



无理数的发现曾付出过沉重的代价.

古希腊毕达哥拉斯学派的学者们一致认为,数皆可表为两整数比的形式(即分数或有理数).但学派成员希伯斯(Speusippus)却发现了边长为1的正方形(单位正方形)其对角线长无法用分数表达.他的发现不仅没能得到学派的肯定,反而招来杀身之祸(据传他被抛入大海葬身鱼腹).

由于无理数的发现加之随后负数概念的引入,人们完成了对于数的一个阶段认识:

实数{有理数{整数(自然数,0,负整数),
分数(正、负分数);
无理数(无限不循环小数).

如今人们对数的认识在不断扩张.

自然数⟶分数⟶无理数⟶实数⟶复数⟶

(有理数)

(负数引入)

整数

代数数

超越数

多元数⟶向量⟶矩阵⟶张量⟶…

(它们不是数,但可运算)

当然,幂指数的扩张经历过同样的历程,只是在那儿拓展进程的时间缩短了.

2.分数阶积分与微分

我们知道:函数微分、积分时,微分的阶数、积分的重数皆为

整数,如3阶导数(3次微分)、2重积分等等.在它们出现不久,柳维尔(Liouville,J.)等人已开始着手将微、积分阶数(重数)拓广到分数情形的工作.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,设 $I_1{}^a f(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 上的积分,而 $I_\alpha^a f(x)$ 为 $I_{\alpha-1}^a f(x)$ 在 $[a,x]$ 上的积分,$\alpha=2,3,\cdots$,则

$$I_\alpha^a f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t,\ a\leqslant x\leqslant b, \tag{1}$$

其中 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$ 是 Γ 函数.

(1)式定义了 $f(x)$ 以 a 为始点的 α 阶分数阶积分,这是数学家柳维尔于1832年给出的,又称 Rimann - Liouville 积分.

对于复参数 z,算子 I_z^a 黎曼(Riemann,B.)曾于1847年研究过,且该算子是线性的且有半群性质.

$$I_\alpha^a[I_\beta^a f(x)]=I_{\alpha+\beta}^a f(x).$$

分数阶积分的逆运算称为分数阶微分:

若 $I_\alpha f=F$,则 f 为 F 的 α 阶分数阶导数.

马尔采特(Marchaut)在 $0<\alpha<1$ 时给出公式:

$$f(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\left\{\frac{F(x)-F(x-t)}{t^{1+\alpha}}\right\}\mathrm{d}t.$$

1832年柳维尔特别研究了算子 $I_\alpha^{-\infty}=I_\alpha,\alpha>0$:

$$I_\alpha f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t.$$

1917年魏尔(Weyl,H.),对以 2π 为周期,且在周期上是零均值的函数:

$$f(x)\sim\sum_{|n|>0}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\sum{}'C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

定义 f 的 $\alpha(\alpha>0)$ 阶 Weyl 积分:

$$f_\alpha(\alpha)\sim\sum{}'\frac{C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{(\mathrm{i}n)^\alpha}; \tag{2}$$

及 f 的 $\beta(\beta>0)$ 阶导数 f^{β},

$$f^{\beta}(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f_{n-\beta}(x), \tag{3}$$

这里 $n=[\beta]$,即不超过 β 的最大整数.

在广义函数论中周期广义函数 $f\sim\sum'C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ 的分数阶积分 $I_{\alpha}f=f_{\alpha}$ 的运算仿(2)且对一切 $\alpha\in\mathbf{R}$ 实现.

黎茨(Riesz,F.)又将分数阶积分推广到 n 维空间 $X\subset\mathbf{R}^n$ 中,且称 Riesz 位势型积分:

$$R_{\alpha}f(x)=\pi\frac{\alpha-n}{2}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\int_X\frac{f(x)}{|x-t|^{n-\alpha}}\mathrm{d}t.$$

且 R_{α} 的逆运算称为 α 阶 Riesz 导数.

至此,微分、积分阶数已由整数拓广到了实数情形(包括 n 维空间里的微分、积分).

3.连续统假设

集合论(用公理化或朴素的直观方法研究集合性质的数学分支)是关于无穷集合和超穷数的数学理论,它的产生是现代数学的一个重要标志.

由于数学分析的研究需要,高斯(Gauss,C.F.)、傅里叶(Fourier,J.)等大师们为集合论产生做了大量铺垫.

1870 年德国数学家海涅(Heine,H.E.)证明了:

若 $f(x)$ 连续,且其三角级数展式一致收敛,则展式惟一.

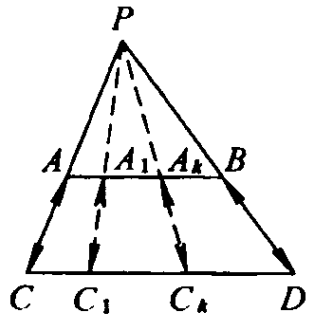
当 $f(x)$ 有无穷个间断点时,上述惟一性能否成立?

德国数学家康托(Cantor,M.)正是研究此问题时创立了集合论,它是以 1874 年发表的《关于一切代数实数的一个性质》一

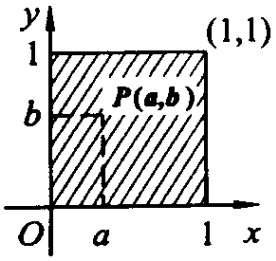
文为标志的.文中康托以“一一对应”的关系,提出集合相等(等势)与否的概念,且提出可数、集合基(势)等概念.

1877 年康托在写给狄德尔的信中提出:

n 维空间的点集同实直线上的点集一一对应(等势).



从一一对应观点,AB 上的点与 CD 上点个数一样多



将单位正方形内任一点 $P(a、b)$ 中 $a、b$ 分别写成无限小数 $a=0.a_1a_2a_3\cdots$,$b=0.b_1b_2b_3\cdots$,则 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$ 对应 $[0,1]$ 上一点,这样单位正方形内点的个数与线段 $[0,1]$ 与点个数一样多

此外,他还证明了:

(1)区间 $[a,b]$ 上的点不可数;(2)超越数比代数数多.

1879 ~ 1884 年康托发表了《关于无穷的线性点集论》六篇论文,提出超穷数概念:$\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\cdots$

($\aleph_0$ 是自然数的个数,$\aleph_1$ 是大于 $\aleph_0$ 的最小基数,$\aleph_2$ 是大于 $\aleph_1$ 的最小基数等等)

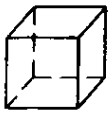
1891 年康托在《集合论的一个根本问题》中引入幂集(集合子集全体所构成的集),且指出幂集的基(或势)大于原集合的基,同时构造了一个比一个大的无穷,进而又提出:

(1)实数不可数(设其基或势为 C);

(2)定义在 $[0,1]$ 上实函数集的基(或势)为 f,则 $f>C$.

这样若自然数全体的基为 $\aleph_0$,则其幂集的基 $2^{\aleph_0}=C$,则 $2^C=f$.

康托做出如下假设：$C = \aleph_1$（即可数基 $\aleph_0$ 后面紧接着便是实数基 C，换言之 $\aleph_0$ 与 C 之间无其他集合的基或者势存在），它被称为连续统假设（简化 CH）.

集　合	基（或势）
1,2,3,4,5,… 或 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$	$\aleph_0$（整数或有理数个数）
或 —　□　或　  　…	$\aleph_1$（线，面，体上几何点个数）
	$\aleph_2$（所有几何曲线或定义在某区间上的全部函数的）

1900 年 CH 也被希尔伯特（Hilbert，D.）列入“未解决的 23 个问题”中的第一个. 直至 1963 年才由美国数学家科恩（Cohen，P.）证明它不能用世所公认的策梅洛（Zermelo，E. F. F.）公理体系（ZF）证明其对错（CH 在 ZF 系统是不可证明的）.

正像欧几里得（Euclid）几何体系中由第五公设而引发的非欧几何的诞生后，在认可的相容性前提下，该公设是独立（不可证明）的.

试想当初人们对康托推出集合论时的非难情形，一切皆随时间的推移和数学的进展而烟消云散.

希尔伯特认为集合论的产生是“数学思想最惊人的产物，是纯粹理性范畴中人类活动的最美表现之一.”

哲人罗素（Russell，B. A. W.）也称康托的工作“可能是这个时代所能夸耀的最宏大工作.”

4.模糊数学的产生

经典集合论中确定某元素是否属于某集合时用“是”或“非”表示,即可用1或0数值去描述.

然而现实生活中诸多事物往往无法用简单的是或非去回答,比如高个子、胖子等概念,当你去判断某人是否是高个子时,是或非的简单回答显然是不准确的,原因是“高个子”概念本身不是确切的,换言之它是一个“模糊”概念.比如规定180 cm以上身高的人为高个子,那么对于身高是179 cm的人来讲,说他不是“高个子”显然过于武断.此外,不同地点、不同场合下“高个子”概念也会随之变化.

运算速度可达每秒数十亿次的计算机在某些方面(比如让它去区分某人是中国人还是外国人这样连幼儿园小朋友都会的问题)不如人的原因,就是计算机只使用了“0”或“1”这两个数值去描述现实世界的结果.

1965年美国加州伯克莱分校的计算机教授查德(Zaden,L.A.)发表了《模糊集合》一文,引入“隶属度”来描述处于中介过渡的事物对差异一面所具有的倾向性程度,从亦此亦彼中区分出非此非彼的信息,是精确性对模糊性的一种逼近.它成功地用数学方法刻画了模糊现象即由事物的中介过渡性所引起的概念外延的不分明性及识别判断的不确定性.这也是特定人群在特定历史条件下对特定概念的反复认识升华或结晶.模糊数学从此诞生.

与传统的集合论相较:在逻辑判断中,同一律、矛盾律、排中律是传统集合论必须遵循的定律,且把排中律破坏称为二律背

反.模糊数学则是将其纳入,以区别传统的二值(仅取0或1)的逻辑.

说得通俗点:模糊数学是将逻辑值由0或1转向[0,1]区间、由取值离散转向连续取值的一种变革.

这样人们在判定某些模糊概念时,就不会出现179 cm身高的人仍不能算"高个子"的武断了,人们可以说:他有0.9的资格(隶属度)称为"高个子".

身高与"高个子"概念的隶属度表

身　高	180 cm以上	175 cm	170 cm	165 cm	…
隶属度	1	0.9	0.7	0.4	…

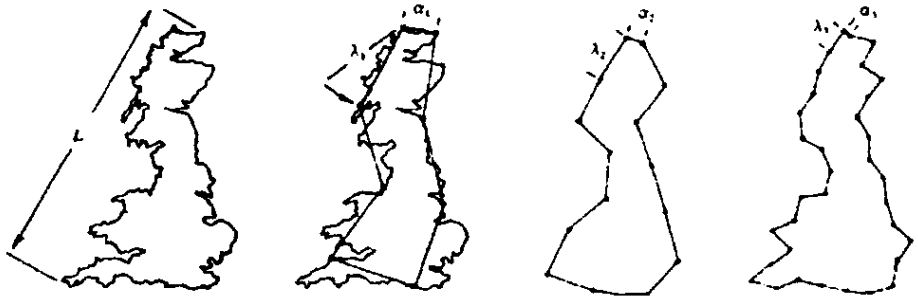
尽管人们对模糊数学的出现产生过反对的意见,但其在诸多领域(如家电开发、决策分析等等)的成功应用已是个不争的事实.

5.分　　形

我们生活的世界俗称3维空间,数学上平面称为2维空间,直线被叫做1维空间,这样线段和正方形分别被称为1维和2维图形.

你也许不会相信0.630 9维、1.261 8维图形的存在,可它又是千真万确的.

1967年法国数学家曼德布鲁特(Mandel-brot,B.B.)曾对"英国海岸线到底有多长"进行思考时发现一个怪异现象:这个长度是不确定的:测量时若不断提高其精度(如尽量多地设置测量点,相邻点间用连接它们的折线替代),所得海岸线长就会增加(且随测量点的增加无限地增长).

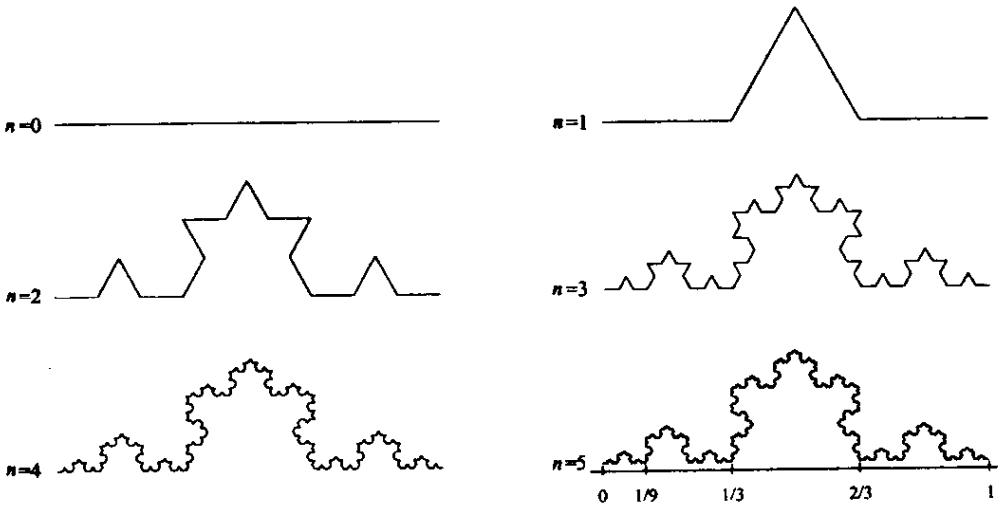


随着过程的延续最终结论是:海岸线长是一个无穷大量.

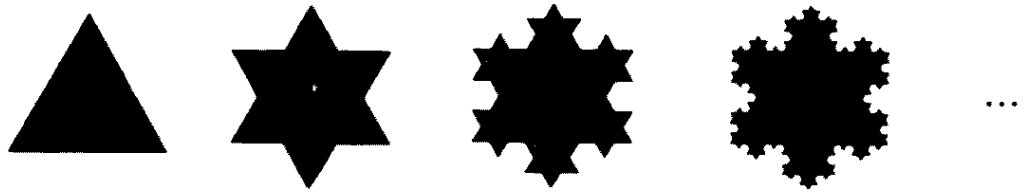
这多少有些出乎人们的预料之外,但它却给那些颇有心计、慧眼识金的数学家一个“发现”的机会.其实数学家们对数学中这些“病态”的怪异早已是熟视无睹(有些甚至是他们造出的).

所谓柯赫曲线(由瑞典数学家柯赫(Koch,H.V.)1906 年给出)便是其中一例.

取一条线段,在其中间$\frac{1}{3}$段作一个正三角形凸起,然后再在每一段(注意此时已有 4 段)上重复上述步骤,……如此下去所得曲线称为柯赫曲线.



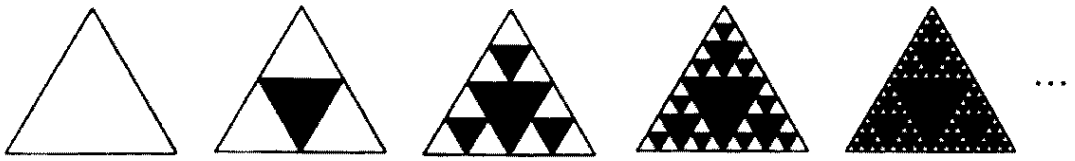
当然如果图形从正三角形每边开始分别作出相应的柯赫曲线,便产生了“雪飞六出”的雪花来.



如果开始的正三角形边长是1,可以算得不断变化的雪花曲线所围面积最终(极限)是$\frac{2\sqrt{3}}{5}$;另一方面,该曲线边界长却是一个无穷大量.

早在1915年波兰数学家谢尔品斯基(Sierpinski,W.)曾制造出下面的曲线:

将一个单位正三角形一分为四且挖去中间的一个小正三角形,然后再在剩下的三个小三角形中重复上面步骤,……如此下去极限图形产生一种曲线——谢尔品斯基垫.

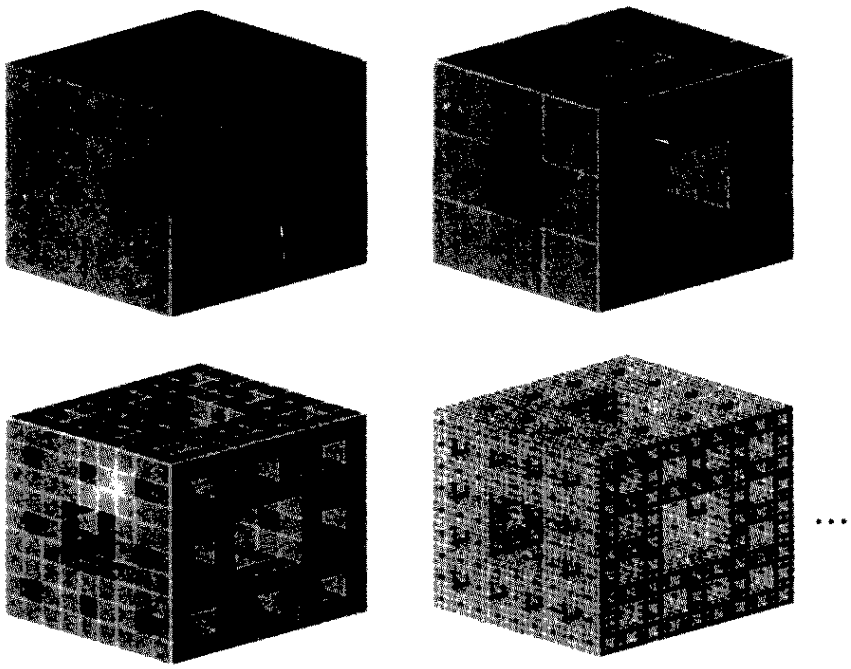


可以算出:若初始三角形面积为 S_0,则上述过程所剩部分图形面积分别为:

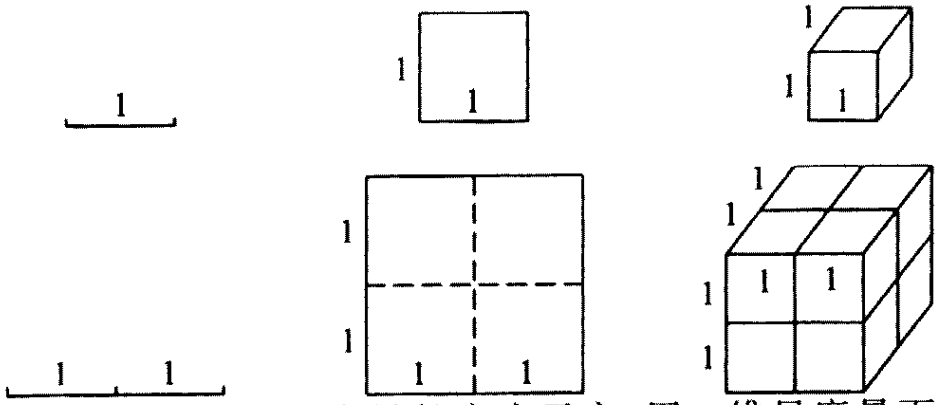
$$\frac{3}{4}S_0,\quad \frac{9}{16}S_0,\quad \frac{27}{64}S_0,\quad \cdots,\quad \left(\frac{3}{4}\right)^n S_0,\ \cdots$$

它的极限是0;另一方面图形边界(曲线)长随着变换变得越来越大,最后趋向无穷.

这种曲线还又推广到3维空间,从单位立方体出发依下面方式构造的曲面称为谢尔品斯基海绵(体积为0,表面积无穷大的曲面).



此外还有“康托粉尘”、“皮亚诺曲线”……这些“病态怪物”被曼德布鲁特看“穿”了.1975 年他在《分形图:形状、机遇和维数》中,提出分数维数概念(分形).试想,当线段(边或棱)增加 1 倍时,线段的长度、正方形面积、正方体的体积分别扩大为原来的 2,4,8 倍,或 2^1,2^2,2^3 倍,那么这里的指数 1,2,3 恰好代表该图形的维数.



柯赫曲线用 1 维尺度量长度为无穷,用 2 维尺度量面积为 0,前者太粗后者过细.曼德布鲁特仿上,令 l 为图形独立方向上扩大的倍数,N 为图形扩大的倍数,则图形维数

$$D=\frac{\ln N}{\ln l}.$$

这样经计算知,英国海岸线的维数为 1.25,柯赫曲线维数是 1.26,谢尔品斯基垫的维数是 1.585 0,谢尔品斯基海绵的维数是 2.726 8 等等.

5.思　　考

著名数学家希尔伯特(Hilbert,D.)说过:"数学科学是一个不可分割的有机整体,它的生命力正在于各个部分之间的联系."

有人曾指出下面四个貌似各异的问题的内在联系(等价性)来:

1.(**微积分学问题**)求 $I=\int_0^{2\pi}\cos(m_1,x)\cos(m_2x)\cdots\cos(m_nx)\mathrm{d}x$ 的极大值,这里 $m_i\in\mathbf{Z}^+(i=1,2,\cdots,n)$.

2.(**数论问题**)若 $m_i\in\mathbf{R}^+$ 且 $a_i=\pm1(1\leqslant i\leqslant n)$,讨论方程 $\sum_{i=1}^{n}a_im_i=0$ 有解 $\{a_i\}$ 的最大个数.

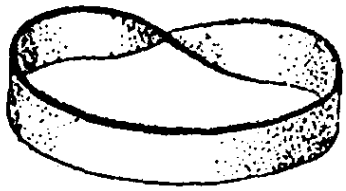
3.(**组合问题**)把一个含有 n 种重量的质点组划分为彼此平衡的两个质点组共有多少种分法?

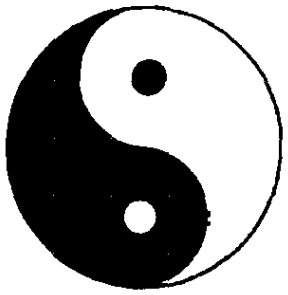
4.(**集合论问题**)若集 S 有 n 个元素,F 是具有下述性质的子集族:①对所有的 $A\in F$,其余集 $A^c\in F$;②对所有的 $A,B\in F$,有 $A\not\subset B$.求 F 中元素最大个数(最大容量).

再如英皇家学会会员,剑桥大学三一学院院长(菲尔兹(Fields,J.C.)奖得主)阿蒂亚(Atiyah,M.F.)在 1976 年 11 月 19 日就任伦敦数学会主席的题为《数学的统一性》演讲中,举了三个"互不相干"的例子[7]:

高斯(Gauss,C.F.)整数环 $Z[\sqrt{-5}]$(即由元素 $a+b\sqrt{-5}$

构成的环，a、b 是整数)中的因子分解问题(代数问题)；





有人认为中国《易》经上阴阳鱼形是莫比乌斯带在平面上的投影

莫比乌斯(Möbius, A.F.)带的性质(几何问题)；

由核函数 $a(x,y)$ 确定的线性微分—积分方程

$$f'(x)+\int a(x,y)f(y)\mathrm{d}y=0$$

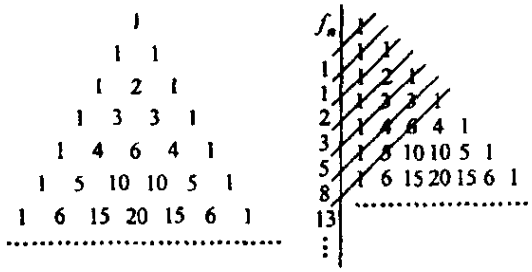
性质(分析问题).

接着他揭示了这三个问题的深刻内在联系：

莫比乌斯带的存在和多项式环 $R[x,1-x]$ 的因子分解不惟一相联系；

若核函数满足 $a(x,y)=-a(y,x)$，则上述微分—积分方程相当于斜伴随算子 A，而 A 的奇偶性恰好与莫比乌斯带的拓扑性质相一致.

笔者也曾撰文指出杨辉三角、斐波那契数列与黄金数 0.618…间的联系：



杨辉三角

杨辉三角改写后诸斜线"/"上的数和恰好构成斐波那契数列 $\{f_n\}$ 的诸项

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}=0.618\cdots$$

斐波那契数列中相邻两项比的极限为黄金数 0.618…

再回到我们前面考察的几个问题：

数 的 扩 充	整数→分数→…
微分、积分阶数	整数→分数→实数→…
集合势(基)的假设 (连续统假设)	$\aleph_0$ 与 $\aleph_1$ 间有无其他基数
模糊数学隶属度	将传统集合逻辑值 0 或 1 拓展到区间[0,1]
分　　形	将图形维数由 0,1,2,3,…拓展到正实数

上述诸多分支看上去似无干系，但你若再仔细品味一下会发现，它们产生的背景意有着惊人的相似：将概念或取值从整数拓展到分数、小数……，将离散推向连续.

自然界的发生、发展有其规律，数学当然也不例外.因而我们可循其规律(如果你已找到)，去发现、去寻觅、去总结、去创造，甚至可以预见它们的前景与未来.

因此我们有理由认为：数学的许多概念也许可遵循上面的思路去延拓(纵然是失败了)，比如我们可以预示：1.5 阶微分方程，$\sqrt{3}$重曲线积分……会出现，尽管目前人们尚无愿望和需要，但这或许是迟早的事情，我们深信.

历史曾经并还将继续给我们很多机会，一旦把握它们，将会给你带来希望与成功.

大师们说过：存在于实验现象与数学结构之间的密切联系，正被近代物理的发现，以一种全然出乎人们意料的方式完全加以证实.

不是吗？

参 考 文 献

[1]梁宗巨,世界数学通史(上),辽宁教育出版社,1993.

[2]吴振奎,数学中的美——数学美学初探,天津教育出版社,1996.(上海教育出版社2002年9月重版,九章出版社即将再版.)

[3]李学数,数学和数学家的故事,新华出版社,1999.

[4]吴振奎,漫话分形,中等数学,1998(3).

[5]刘德铭,数学与未来,湖南教育出版社,1987.

[6]张奠宙,数学的明天,广西教育出版社,2000.

[7]M.F.阿蒂亚(胡作玄译),数学的统一性,数学译林,1980(1).

[8]J.N.Kapur(王庆人译),数学家谈数学本质,北京大学出版社,1989.

[9]吴振奎,巧合?统一?辽宁教育出版社:数理化信息,1986(2).(见本书附录三.)

[10]胡作玄,邓明立,20世纪数学思想,山东教育出版社,1999.

[11]B.L.波尔金斯基,B.A.叶夫莱莫维奇(高国士译),漫谈拓扑学,江苏科技出版社,1983.

[12]H.G.瓦西里也夫,B.N.库金马赫尔(张克译),趣话曲线,福建人民出版社,1982.

[13]楼世博,孙章,陈化成,模糊数学,科学出版社,1983.

[14]《数学百科全书编译委员会》,数学百科全书(1~5卷),科学出版社,1994~2000.

上篇

数学家的发现与创造

了解重大发现，特别是那些决非偶然的、经过深思熟虑而得到的重大发现的真正起源，是极为有益的.

——韦尔(Weyl, H.)

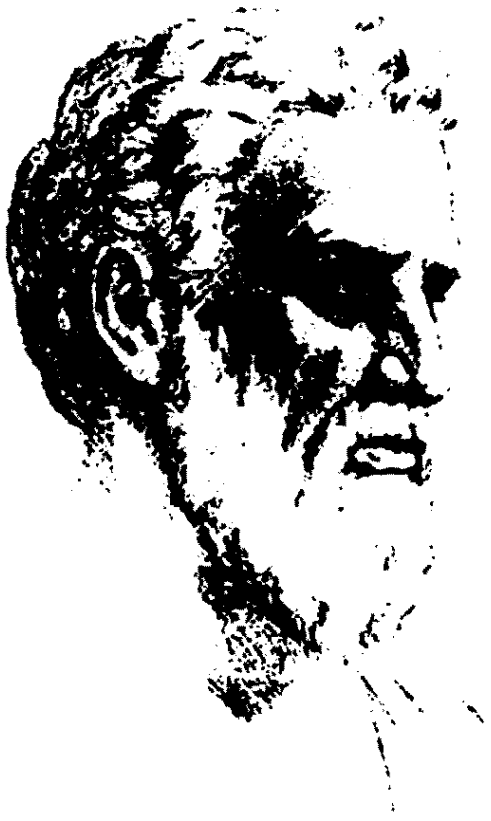
数学主要是一项创造性活动，因此它要求想像、几何直觉、实验、有见识的猜测、尝试、朦胧的类比和归纳探索.

——克莱因(Kline, M.)

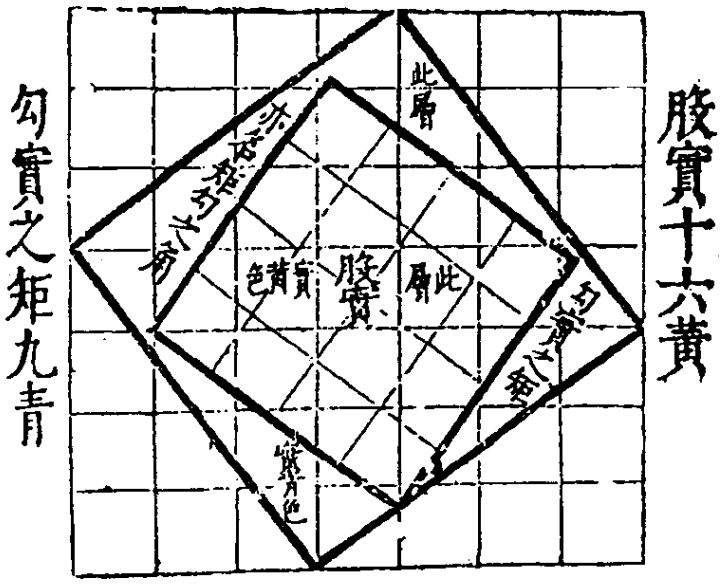
一 数论不败

1.多角数引发的题课

毕达哥拉斯(Pythagoras)是古希腊著名数学家,他以发现在我国称为“勾股定理”的几何命题而闻名.

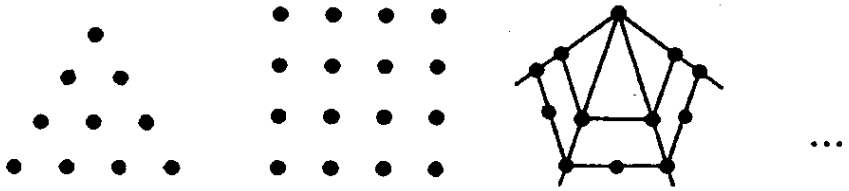


毕达哥拉斯(Pythagoras)



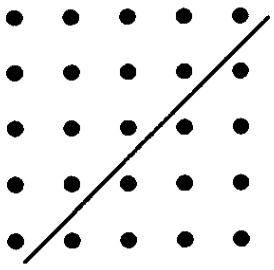
中国古算书上的勾股圆方图

“多角形数”是古希腊毕达哥拉斯学派计数的一种方式，他们用石子摆成三角形、正方形、五边形等，且称这些数分别为三角形数、四角形数、五角形数……．



三角形数　　四角形数　　五角形数

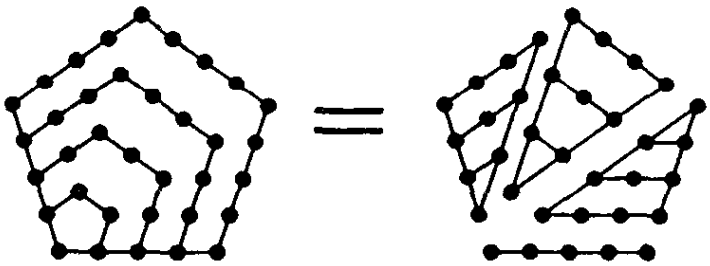
这些数也简称为“形角”．关于这类数，早在毕达哥拉斯年代就已发现了它们的许多有趣性质，比如：



任何一个四角形数皆为两个相邻三角数之和．

结论几乎不证自明．

又如：第 n 个五角形数等于第 $n-1$ 个三角形数的 3 倍再加上 n．



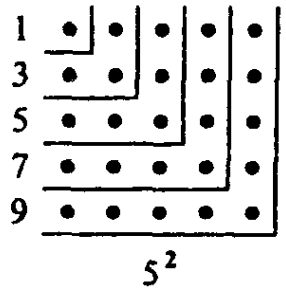
这样，一但有了三角形数的通项公式，四角形数、五角形数的通项也就可以表示出来了.

一般地我们推导出 k 角形数的通项(见下表，它们可以分别通过上一级镶边后得到).

第 n 个 k 角数	三角数	四角数	五角数	六角数	…	k 角数
表达式	$\frac{n(n+1)}{2}$	n^2	$\frac{3n^2-n}{12}$	$2n^2-n$	…	$\frac{n+(n^2-n)(k-2)}{2}$

此外利用形数还可以推导某些数学公式，比如我们可以利用下面图形导出公式：

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2.$$



5^2

人们定义了所谓完全数，即全部约数(包括 1 但不含自身)和等于其自身的整数.1575 年人们发现：

偶完全数必为三角形数.

1637 年，法国业余数学家费尔马(Fermat，P.de)意外地发现：

每个自然数皆可表为 k 个 k 角数之和.

其实这类问题早在古希腊时丢番图(Diophantus)已有关注，比如：自然数表为四个四角数(即完全平方数)和问题(这里简述一下，后文我们将详述它).

1621 年，法国人巴契特(Bachetde，M.)曾就上面结论对 1～325 的数一一做了验算.

1730 年，数学大师欧拉(Euler，L)开始研究此问题，十三年

后,他发现了下面的公式:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(r^2+s^2+t^2+u^2)$$
$$=(ar+bs+ct+du)^2+(as-br+cu-dt)^2$$
$$+(at-bu-cr+ds)^2+(au+bt-cs-dr)^2. \quad (*)$$

(*)式是说:可表为四个完全平方和的两数之积仍可由四个完全平方数的和表示.

1770 年,数学家拉格朗日(Lagrange,J.L.)依据欧拉的工作,给出了"自然数可表为四个完全平方数和"的证明.

1773 年,66 岁的欧拉(已双目失明)又给出该问题的另外一种简证.

关于自然数可表为三个三角形数问题,直到 1796 年才由数学王子高斯(Gauss,C.F.)证得.

1796 年 7 月 10 日高斯在他的日记上写到:

$$\text{ΕΥΡΗΚΑ! num}=\triangle+\triangle+\triangle.$$

这儿"num"即西文"数"的缩写,"△"表示三角形数,"ΕΥΡΗΚΑ(意为找到了)!"是当年古希腊学者阿基米德(Archimedes)在浴池中发现"浮力定律"时,兴奋地跑到希拉可夫大街上狂呼的话语,这也足以说明高斯发现该命题证明时的兴奋.

这个结果是他在研究二次型问题时得到的,同时他也给出"自然数可表为四个四角形数和"的另一简证.

二十年后,1815 年法国数学家柯西(Cauchy,A.L.B.)才对一般 k 的情形给出证明(他在巴黎科学院宣读的一篇论文中提到的):

自然数可用 k 个 k 角数表示.

其实,华林(Waring,E.)问题(自然数用 k 次方和表示的问题,这一点我们后文还将介绍)的提出,正是受上述思想启发而成.

2.自然数表为平方和问题

英国大数学家哈代(Hardy,G.H.)不仅在数学上贡献很大,他在发现、培养数学新秀方面也功不可没.印度早逝的数学天才拉马奴扬(Ramanujan,S.)正是哈代发现,并将他从印度邀至英国的.

拉马奴扬1887年生于印度马德拉省的一个贫苦人家,从小便有惊人的记忆才能,他能背诵出π、$\sqrt{2}$等常数的小数点后几十位.因家境贫寒,无力攻读大学,只是利用业余时间研究某些数学问题.

他的出色工作(尽管他没有受过正规大学的教育)引起了哈代的关注,1914年被推荐到伦敦剑桥大学学习,三年间发表论文40余篇.

然而寒冷阴湿的英国气候对于这位在热带印度出生的人常常感到不适应,因而他经常患病.

一次他因病住院,哈代乘出租车去医院看望他.闲聊之际,哈代无意讲出他所乘出租车牌号为1 729.拉马奴扬沉思片刻随即说道:"1 729是一个吉利数字,因为它是能用两种方法表示成两个自然数立方和的最小整数."

请注意:$1\ 729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

自然数表示成平方、立方和问题,早在两千多年前就为古希腊人所关注.

早在公元3世纪前后,古希腊数学先师丢番图(Diophantus)猜测:

自然数可表为四个整数的平方和.

其实,许多自然数只需用两个整数的平方和即可表示,比如:

$1=0^2+1^2$, $2=1^2+1^2$, $4=0^2+2^2$, $5=1^2+2^2$,…

但有些数不行,比如:3,6,7,…

$3=1^2+1^2+1^2$, $6=1^2+1^2+2^2$, $7=1^2+1^2+1^2+2^2$,…

为了搞清这些,法国数学家费尔马(Fermat,P.de)首先认识到:

除2以外的素数,皆可表为$4k+1$或$4k+3$形状(k是整数).

1640年费尔马写给麦森(Mersenne,M.)的信中提到了下面的结论(直到1754才由欧拉(Euler,L.)严格证明):

每个$4k+1$型素数皆可表为两个整数的平方和(双平方和定理).

此后有人证明:

形如$4^m(8n+7)$型整数(m、n非负整数)则需四个完全平方数和表示.

前文我们说过,1621年法国人巴契特(Bachetde,M.)对1~325的整数进行验算,核验了丢番图关于整数表为四平方和的猜想.

解析几何的发明者法国数学笛卡儿(Descartes,R.)也曾考虑过该猜想,但他经过一番思考后感叹道:"它实在太难了,以至我不敢动手去做."

1730年,数学大师欧拉开始研究这个问题.

许多年过去了,研究工作几乎毫无进展.欧拉苦苦思索了十三年.

一天欧拉在研究印度人波罗摩笈多(Brahmagupta,约598~660)的《婆罗摩修正历数书》,他发现书中出现的公式:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(ax+by)^2,$$

进而他意识到公式的博深含义:

可表为两个完全平方数和的两数之积仍可表为两完全平方数和.

当他试图将结果扩展到三平方和时,他遇到了极大的挑战,因为:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$=(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2+(ax-by-cz)^2,$$

换言之,能用三个数平方和表示的两数之积,一般不能用三个数平方和表示.

欧拉沉思着,当他用笔在草稿纸疾书时,他终于发现:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$$
$$=(ax-by-cz-dt)^2+(ay+bx+ct-dz)^2$$
$$+(az-bt+cx+dy)^2+(at+bz-cy+dx)^2.$$

此式我们前文已述,其意义为:两个可表为四平方的数之积仍可用四个整数的平方和表示.

这样,自然表为四平方和问题只须对素(质)数进行讨论即可,因为任何整数皆可表为若干素(质)数之积.

我们说过,1770 年,数学家拉格朗日(Lagrange,J. - L)利用欧拉的上述等式,证明了整数表为四平方和定理.

三年后,已 66 岁并双目失明的欧拉,以其顽强的毅力,也给出"整数表为四平方和"的另一证明.

在此应该指出:上述整数表为四平方数和问题中,并无"相异整数平方和"的限制,否则结论将是另一番情景.

图兰(Turán,G.)首先发现:

自然数 n 表成两两互素的整数平方和时,四个是不够的.比如 $n=8k$ 或 $6k+5$ 型时.

尔后,弗罗毕格(Fröberg,B.)和(黎塞尔 Riesel)证明了:

$n\leqslant 188$ 时,有 31 个整数不能用四个不同整数的平方和表

示,且 124 和 188 须用 6 个不同整数的平方和才能表示.

同时,他们还证明了:

$n > 188$ 时,n 可以用五个两两互素的整数平方和表示.

问题并未到此完结,就在拉格朗日证明整数可表为四平方和问题的那年,华林(Waring,E.)出版了他的《代数沉思录》,书中写道:

自然数可用 9 个立方数和表示;也可用 19 个四次方数表示;…

此后,朗道(Landen,E.G.H.)证明了:

除 23 和 239 以外,正整数可表为 8 个非负立方数和;且当自然数足够大时,每个正整数皆可表为 7 个非负立方数和.

(荷兰数学家雅各布·伯奴利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)的关于自然数表为整数立方和数表中开列了此两数.)

但这儿"足够大"的整数仍是令人生畏的.

为叙述方便计,下面用 $g(k)$ 表示自然数表为 k 次方和的最少个数.这样"自然数可表为四整数平方和"则记为 $g(2)=4$;又华林问题分别要证 $g(3)=9, g(4)=19$ 等.

1893 年,梅莱(Maillet,E.)证明 $g(3)\leqslant 21$.

1909 年,威弗里西(Wieferich,A.)证明 $g(3)=9$.

此前(1908 年)数学家希尔伯特(Hilbert,D.)曾一举证明:

对任何正整数 k,自然数皆可表为有限多个 k 次方数之和.

关于 $g(4)$ 问题,数学家柳维尔(Liouville,J.)证得 $g(4)=53$.他的证明简述如:

因任意自然数 n 皆可表为 $n=6x+r$ 形式,这里 $r=0,1,2,3,4,5$,且 x 为非负整数.

由前面结论知:$x=a^2+b^2+c^2+d^2$,而其中

$$a=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2;\quad b=b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2;$$

$$c = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2; \qquad d = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

将它们代入 $n = 6x + r$，注意到：

$$\begin{aligned}&6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\\ &= (x_1 + x_2)^4 + (x_1 + x_3)^4 + (x_1 + x_4)^4 + (x_2 + x_3)^4 + (x_2 + x_4)^4 + (x_3 + x_4)^4 + (x_1 - x_2)^4 + (x_1 - x_3)^4 + (x_1 - x_4)^4 + (x_2 - x_3)^4 + (x_2 - x_4)^4 + (x_3 - x_4)^4,\end{aligned}$$

此即说：$6x$ 最多可用 $4 \times 12 = 48$ 个四次方数和表示；又 r 为 0～5 之一，它们最多可用 5 个整数四次方和表示（只须直接验算即可）.

这样，任意自然数 n 最多只须用 $48 + 5 = 53$ 个四次方和表示.换言之 $g(4) \leqslant 53$.

而后 $g(4)$的个数分别降到 47、45、41、39、38.

威弗里西最后证得 $g(4) = 37$.

英国数学家哈代（Hardy，G. H.）和利特伍德（Littlewood，J. E.）从另一角度去考虑该问题，他们证得：

从某个大数 N 起，任何自然数皆可用 19 个四次方数和表示.

由于这个 N 很大，以致对于小于 N 的数的验算十分困难.

1986 年四位美国数学家联手终于证得 $g(4) = 19$.

对于前面希尔伯特提出的结论，人们也给出了似乎更具体的表述：

对于充分大的 N，$n > N$ 的自然数表为整数 k 次方和问题均有 $4 \leqslant g(k) \leqslant 7$，$k \geqslant 2$.

（对于充分大的 N 的 $g(k)$问题，人们也记作 $G(k)$以与 $g(n)$区别.）

自然数表为 k 次方和问题还与所谓多角数有关（见前文），

此外它的推广即自然数表为$\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)$型数，即所谓“棱锥数”和问题也有如下进展：

1928年杨武之证明自然数至少要用9个棱锥数和表示.

1952年，沃森(Watson，G.L.)将结论改进为8个.

1968年，萨兹尔(Salzer)用电子计算机进行核验发现：当$n \leqslant 452479659$时，除261以外，皆可用5个棱锥数和表示.

1993年，杨振宁、邓越凡将n的上界推至10^9，即$n \leqslant 10^9$时，除261以外，皆可用5个棱锥数和表示.

关于$g(3)$的研究：欧拉曾发现漂亮的等式：

$$3^3+4^3+5^3=6^3(=216),$$

由此他还将$g(3)$问题拓广到有理数，即自然数若表为有理数立方和，仅须3个即可.

欧拉本人曾给出过1表为3个分式立方和的式子.

如前所述：1754年，欧拉给出了双平方和定理的严格证明.说到这儿，我们就此想谈一下另一个与之有关联的问题(看上去似乎风马牛不相及)，即棋盘n后问题.

高斯曾提出下面一个棋盘置“后”问题：

8×8的棋盘上能否放置8个“后”而使它们彼此不能互相吃掉？

高斯给出了肯定的回答，且认为此问题有76种解.如今电子计算机帮助人们已找出它的全部92种解.

1850年，诺克(Noker)将“8-后”问题作了推广，提出：

$m\times n$棋盘上能否放置n个“后”而使它们彼此不能互相吃掉？(n-后问题)

人们经过研究给出“n-后”问题及其解的个数，如下表：

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
解的个数	2	10	4	40	92	352	724	2680	14200	73712	…

同时,1969 年霍夫曼(Hofman)等人证明了:

对于 $n \geqslant 4$,"n - 后"问题总有解.

本世纪初,波利亚(Polga,G.)以其犀利的目光明确指出:费尔马双平方和定理与"n - 后"问题有关联.

六十年后(1977 年),拉森(Larson,L.C.)利用"n - 后"问题的解法给出了费尔马双平方和定理的一个漂亮证明(有资料显示,德国数学家闵可夫斯基(Minkowski,H.)也曾给出过类似的证明).

3.素数个数的估计

素数是数学中最重要、最基本的概念之一.关于素数个数的讨论,早在两千多年前,古希腊学者欧几里得(Euclid)已在其名著《几何原本》中给出且证明:

素数有无穷多个.

人们又发现素数在自然数中所占比例很小,若记 $\pi(x)$ 为不超过 x 的素数个数,数学大师欧拉(Euler,L.)证明了下面的结论:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x}=0.$$

然而对于 $\pi(x)$ 的估计却经历了极为漫长的过程.

18 世纪以前,人们已经知道:

在 $n \sim 2n-2$ 之间(n 为自然数)至少有一个素数,在 $n \sim 2n$ 之间至少有两个素数.

利用爱拉托色尼(Eratosthenes)筛法可以得到一个复杂的公

式.用此公式可以由小于$\sqrt{n}$的素数个数去确定小于 n 的素数个数.后经不少人改进,且利用这些结论已估算得:

(表 1)

年　份	计 算 者	结　果
1870 年	[法]麦森(Mersenne, M.)	小于 10^8 的素数个数 5 761 455
1893 年	[丹麦]伯特森(Bottson)	小于 10^9 的素数个数 50 847 478
1959 年	[美]莱默(Lehmer, D.N.)	小于 10^9 的素数个数 50 847 534
1959 年	[美]莱墨	小于 10^{10} 的素数个数 455 052 511

然而人们更希望能给出 $\pi(x)$的一个更为普适的解析表达式(要知道素数分布的规律较难捕捉).

1780 年法国数学家勒让德(Legendre, A.M.)利用爱拉托色尼筛法和估计给出 $\pi(x)$的第一个近似表达式(记号"~"表示"等价于"之意)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x - 1.083\,66} \quad (x \to \infty).$$

尔后,德国数学家高斯(Gauss, C.F.)对其作了修改(1792 年),但它与实际结果差距仍较大.这之后,高斯发现了 $\pi(x)$与 $x/\ln x$ 有很好的近似.他首先定义了函数

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad (\text{对数积分}).$$

容易证明,对任给实数 a,总有

高斯(Gauss, C.F.)

$$\frac{x}{\ln x + a} \sim \frac{x}{\ln x} \sim \mathrm{Li}(x) \quad (x \to +\infty).$$

高斯猜测：$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}(x \to +\infty)$，这便是著名的高斯定理.

1850 年前后，俄国数学家切贝雪夫（Чебышёв，П.Л.）发现并证明了：存在常数 C_1, C_2，使

$$\frac{C_1 x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant \frac{C_2 x}{\ln x} \quad (x \geqslant 2).$$

同时他还证明：当 $x > 4 \times 10^5$ 时有

$$\frac{1}{3} < \frac{\pi(x)\ln x}{\lambda} < \frac{10}{3}.$$

所有这一切为素数定理的证明奠定了基础.由前述结论当然有估计：$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$.事实上，$\pi(x)$与 $\mathrm{Li}(x)$的近似程度如此之好（特别是当 x 较大时），这可以从下表数据中：

$\pi(x)$与 $\mathrm{Li}(x)$比较表　　（表 2）

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	…
$\pi(x)$	4	25	168	1229	9592	78498	…
$\mathrm{Li}(x)$	6	29	178	1246	9630	78628	…
$\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$	2	4	10	17	38	130	…

从表上人们又看到一个似乎是不争的事实，$\mathrm{Li}(x)$总比$\pi(x)$大，但事实情况并非如此.

1914 年立特伍德（Littlewood，J.E.）证明：

存在充分大的 N 使 $\pi(N) > \mathrm{Li}(N)$；同时还有 $N' > N$ 使 $\pi(N') < \mathrm{Li}(N')$.

1955 年，斯奎斯（Skewes，S.）证明这样的 N 不超过 $e^{e^{e^{79}}}$（约 $10^{10^{10^{34}}}$）.

1966 年，莱赫曼(Lehman)证明这个 N 不超过 1.65×10^{1165}.

1986 年，黎勒(H.J.J.te Riele)找到了更小的 N，它约为6.69×10^{370}.

这样人们消除了 Li(x)对 $\pi(x)$估计偏高的误会.换言之，偏差 Li(x) - $\pi(x)$是摆动的.

另外，人们发现 $\pi(x)$通常要比$\frac{\sin x}{x}$大，但 1914 年哈代(Hardy，G.H.)和立特伍德证明对充分大的 N，情况则相反.1955 年斯奎斯认为这种情况在 $N=10^{10^{35}}$ 前便会发生.

下表给出了一些 x 的 $\pi(x)$，$x/\ln x$ 等的具体数值.

某些 x 的 $\pi(x)$，$x/\ln x$，Li(x)等值　　(表 3)

x	$\pi(x)$	$x/\ln x$	li(x)	$\pi(x)\ln x/x$
10^3	168	145	178	1.16
10^4	1 229	1 086	1 246	1.13
10^5	9 592	8 686	9 630	1.10
10^6	78 498	72 382	78 628	1.084
10^7	664 579	620 417	664 918	1.071

从表可以看到：①Li(x)的估计一般比 $x/\ln x$ 的估计要好；②随着 x 的增大，$\pi(x)\ln x/x\to1$.

1859 年，数学家黎曼(Riemann，B.)试图证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1,$$

但过程并不完整，可其中包含了证明它的必要思想和方法.

1896 年，法国数学家哈达玛(Hadamard，J.)、玛格瑞特(Mangoldt，H.Von)给出结论的完整证明.

利用前面提到的切贝雪夫给出的不等式，亦可证明上述结论的一个部分结果：若$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}$存在，则必为 1.

顺便指出,估计式

$$\pi(x) \sim x/\ln x \quad (x \to \infty)$$

还有着有趣的推广和改进:

$$\pi(x) \sim x/\ln x + x/\ln^2 x.$$

关于这些有兴趣的读者可参见文献[14].

综上,对于 $\pi(x)$的估计可有下面小结:

(表 4)

年　份	发现、证明者	$\pi(x)$ 的 估 计
1780 年	勒 让 德	$f(x)=\dfrac{x}{\ln x-1.083\,66}$　(*)
1792 年	高　斯	对上式有改进且定义 $\mathrm{Li}(x)=\int_2^x \dfrac{\mathrm{d}t}{\ln t}$
1850 年	切贝雪夫	$\dfrac{1}{3}<\dfrac{\pi(x)\ln x}{x}<\dfrac{10}{3}$　(**) (当 $x>4\times10^5$ 时)
1859 年	黎　曼	证明 $\pi(x)\sim\dfrac{x}{\ln x}(x\to\infty)$　(***)但不完整
1896 年	阿达玛等	完整地证明了(***)

素数定理的初等证明方法较多,详见文献[14].

关于素数定理还有一些推广和猜测,比如若记 $\pi(x,f(n))$为 x 下(即不超过 x)的形如 $f(n)$的素数个数,则有

(1) $\pi(x,4n+1)\sim\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{\ln x}$　$(x\to\infty)$;

(2) $\pi(x,n^4+1)\sim 2.678\,7\cdots\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{\ln x}$　$(x\to\infty)$;

(3) $\pi(x,2^n-1)\sim 2.569\,5\cdots\cdot\ln\ln x$　$(x\to\infty)$;

(4) $\pi(x,n^2+1)\sim 1.372\,8\cdots\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$　$(x\to\infty)$.

$$(5)\pi(x, n^2+n+41) \sim 6.639\ 5\cdots \cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \quad (x \to \infty)$$

其中各常数的数论结构(以下用$\left(\frac{p}{q}\right)$表示平方剩余记号)为:

$$2.678\ 7\cdots = \prod_{p\text{是奇素数}} \left[1 - \frac{\left(\frac{-1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \left(\frac{-2}{p}\right)}{p-1}\right];$$

$$1.372\ 8\cdots = \prod_{p\text{是奇素数}} \left[1 - \frac{\left(\frac{-1}{p}\right)}{p-1}\right];$$

$$6.639\ 5\cdots = 2\prod_{p\text{是奇素数}} \left(1 - \frac{\left[\frac{-163}{p}\right)}{p-1}\right];$$

$2.569\ 5\cdots = \frac{e^c}{\ln 2}$,其中 c 是 Euler 常数 $0.577\cdots$.

4.谈素(质)数表达式

素(质)数历来为数学家们所关注,它的魅力和关于它的话题可谓经世不竭.

前面我们已经说过:早在两千多年以前,古希腊学者欧几里得(Euclid)已指出且证明:

素数有无穷多个.

然而,检验素数(特别是当它很大时)是一件十分复杂的工作.

筛　法

公元前两世纪,古希腊学者爱拉托色尼(Eratosthehes)创造

的“筛法”为人们寻找素数提供了方法和工具:写下正整数 1,2,3,4,…,n,在 2 上画个圈,然后从 2 起每隔 1 个数划去一数(划去所有 2 的倍数),在 3 上画个圈,从它起每隔 2 个数划去一数(划去所有 3 的倍数),……,在 k 上画个圈,从它起每隔 $k-1$ 个数划去一个数(画去所有 k 的倍数),……仿此下去直至所有不大于$\sqrt{n}$的数皆被圈上或划去为止,则剩下的和被圈上的数都是素数(除 1 外).

1	②	③	~~4~~	⑤	~~6~~	⑦	~~8~~	~~9~~	~~10~~
⑪	~~12~~	⑬	~~14~~	~~15~~	~~16~~	⑰	~~18~~	⑲	~~20~~
~~21~~	~~22~~	㉓	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	㉙	~~30~~
㉛	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	㊲	~~38~~	~~39~~	~~40~~
㊶	~~42~~	㊸	~~44~~	~~45~~	~~46~~	㊼	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	㊸	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	㊾	~~60~~

上表划去了 2,3,5,7 的倍数后($8 > \sqrt{60}$已被划去)便完成了筛选,表中剩下的数(除 1 外)和被圈上的数皆为素数.

显然,此种方法十分繁琐,尽管历史上有人曾为此付出过巨大的努力(比如 19 世纪奥地利天文学家库里克(Kulik)曾花去二十年光阴完成 10^8 以内的整数筛选).电子计算机的出现与发展,给上述工作带来方便与希望.

1934 年东印度的桑达拉姆(Sundaram)也发明了一个筛选素数的方法,方法是这样的:

先依照下面方法构造数阵:

第 1 行是首项为 4 公差为 3 的等差数列:4,7,10,13,16,19,…

第 2 行系首项为 7(第 1 行第 2 项)公差为 5 的等差数列:7,12,17,22,27,32,…

第 3 行系首项为 10(第 1 行第 3 项)公差为 7 的等差数列:

10,17,24,31,38,45,…

一般地,第 k 行系首项为 $4+(k-1)\times 3=3k+1$(第一行第 k 项),公差为 $2k+1$ 的等差数列.这样有数阵

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & \cdots \\ 7 & 12 & 17 & 22 & 27 & 32 & \cdots \\ 10 & 17 & 24 & 31 & 38 & 45 & \cdots \\ 13 & 22 & 31 & 40 & 49 & 58 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

不难算得数阵通项为:

$$a_{kj}=3k+1+(j-1)(2k+1)=(2j+1)k+j.$$

(这里 k 为行数,j 为列数)

容易看出该数阵是关于主对角线对称的(从矩阵观点看,它是一个对称矩阵).

桑达拉姆发现:

若自然数 n 出现在上面数阵中,则 $2n+1$ 不是素数;若 n 不在上面数阵中出现,则 $2n+1$ 肯定是素数.

当然,桑达拉姆的筛法本质上讲是筛掉了素数,而埃拉托色的方法恰恰相反(素数被保留下来).

此外,埃拉托色筛法不会有遗漏(保证每个素数均被筛出),而桑达拉姆的筛法却无法保证这一点(比如惟一的偶素数 2 就筛不出).

桑达拉姆筛法的原理证明并不很复杂,可用反证法证明如下(n 在数阵中,$2n+1$ 为合数的证明显然):

若不然,知 n 不在数阵中且 $2n+1$ 为合数,则 $2n+1=ab$,这里 a、b 皆为大于 1 的奇数.

今令 $a=2p+1$,$b=2q+1$,则 $2n+1=(2p+1)(2q+1)=2[p(2q+1)+q]+1$.

显然，$p(2q+1)+q$ 为数阵中的项，与前设矛盾．从而 $2n+1$ 为素数．

素数表达式

无论如何，筛法都是繁琐的（纵然你拥有高速计算机，即便你有好算法）．人们不禁要问：有无一个公式用它去表示所有素数（如果可能，数论中的许多问题可迎刃而解了，包括哥德巴赫猜想等）？历代数学家为了寻找它历尽艰辛，走过曲折而漫长的道路．

1640 年前后，法国数学家费尔马（Fermat，P．de）曾给出一个素数表达式：

$$F_n = 2^{2^n} + 1,$$

他验证当 $n = 0,1,2,3,4$ 时，它均为素数（$F_0 = 3$，$F_1 = 5$，$F_2 = 17$，$F_3 = 257$，$F_4 = 65\ 537$），他断言：当 n 为正整数时，F_n 皆给出素数．

不幸的是，1732 年数学家欧拉（Euler，L．）指出：

$n = 5$ 时，$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \times 6\ 700\ 417$，

显然它不再是素数．

又如麦森（Mersenne，M．）认为：对某些素数 p 来讲，$2^p - 1$ 给出素数（人称麦森素数）．然而这种素数到底有多少（人们更关心它是否有无穷多个），人们尚不得知（至今仅找到 39 个）．关于以上两点，我们另文再述．

其实，对于可以给出某些素数的公式还有不少，比如：

欧拉于 1772 年发现：$f(n) = n^2 + n + 41$，当 $-40 \leqslant n \leqslant 39$ 的整数时，$f(n)$ 均给出素数（$f(40) = 41^2$ 已不是素数，即便如此，1963 年有人在电子计算机对 $n = 1 \sim 10^7$ 进行计算表明，公式产

生素数的比例高达 47.5%).

此后类似的公式人们又陆续给出,比如:

$f(n)=n^2-2\,999n+224\,854$,当 $1460\leqslant n\leqslant 1539$ 时(整数)共给出 80 个素数;

$f(n)=n^2-79n+1\,601$,当 $0\leqslant n\leqslant 79$ 时也给出 80 个素数.

20 世纪 50 年代,毕格尔(Beeger)认为:$B(n)=n^2-n+72\,491$,当 $0\leqslant n\leqslant 11\,000$ 的整数皆给出素数.然而几年前有人指出:

$$B(0)=72\,491=71\times 1\,021,$$

$$B(5)=72\,511=59\times 1\,229,$$

$$B(9)=72\,563=149\times 487,$$

均不是素数,从而否定了毕格尔的结论.

再如,当 p 是某些素数时,$\frac{2^p+1}{3}$给出素数(见下表):

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
$\frac{2^p+1}{3}$	3	11	43	683	2 731	43 691	174 761	2 796 203	178 956 771	715 827 883

但当 $p=37$ 时,$\frac{2^{37}+1}{2}=45\,812\,984\,491=1\,777\times 25\,781\,083$,亦不再是素数.

不久前嘉茨(Gazsi, A. T.)发现:$f(n)=60n^2-1\,710n+12151$,当 $n=1,2,\cdots,19,20$ 时,共产生 8 对正的相继素数对(偶)和 1 对负的相继素数对(-29 和 -31).

显然,以上诸公式只是局部地给出一些素数,要是寻找可表达全部素数或者至少可给出的都是素数的表达式也远非易事.

1961 年,台尔曼(Tallman, M. H.)给出下面一个可产生素数的公式:

$$N=\frac{P_n}{p_ip_j\cdots p_m}\pm p_ip_j,\cdots p_m.$$

这里 $P_n = \prod_{i=1}^{n} p_i$（前 n 个素数之积），$p_i, p_j, \cdots p_m$ 是前 n 个素数中的部分或全部.

显然，$N < p_{n+1}^2$（p_{n+1} 为第 $n+1$ 个素数）.其实这是一种递推形式的公式.

利用二元函数表示素数，人们也陆续发现了一些公式：

1963 年，布瑞德汉证明：$f(m,n) = m^2 + n^2 + 1$ 对无穷多对 (m,n)，式 $f(m,n)$ 都给出素数（然而并非每对 (m,n) 公式皆给出素数）.

此后又有人给出公式：

$$F(m,n) = \frac{n-1}{2}[\,|B^2 - 1| - (B^2 - 1)\,] + 2,$$

这里 $B = m(n+1) - (n! + 1)$，当 (m,n) 取整数时，$F(m,n)$ 均表示素数.

四川峨眉疗养院王晓明先生来函嘱我将他的发现介绍给读者，他的公式（埃拉托色尼筛法公式）基于下列命题：

命题 n 不能被不大于$\sqrt{n}$的任何素数整除，则 n 是素数.

公式 $n = p_1 m_1 + a_1 = p_2 m_2 + a_2 = \cdots = p_k m_k + a_k$. (1)

这里 $p_1, p_2, \cdots$ 表示顺序素数 $2,3,5,\cdots$，$a_i = 1,2,\cdots,p_i - 1$. 若 $n < p_{k+1}^2$，则 n 是素数.

公式(1)的同余形式为：

$$n \equiv a_1 (\mathrm{mod}\ p_1), n \equiv a_2 (\mathrm{mod}\ p_2), \cdots, n \equiv a_k (\mathrm{mod}\ p_k) \quad (2)$$

因为(2)是关于模 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 两两互素，由孙子定理，公式(2)在给定 a 值时，在 $p_1 p_2 \cdots p_k$ 内有惟一解.利用上两公式可构造全部素数.

例举：$k = 1$ 时，由 $n = 2m_1 + 1$，得 $n = 3,5,7$.

（已得区间$(3,3^2)$的全部素数）

$k=2$ 时，由 $n=2m_1+1=3m_2+1$ 得 $n=7,13,19$；由 $n=2m_1+1=3m_2+2$ 得 $n=5,11,17,23$；

（已得区间$(5,5^2)$的全部素数）

$k=3$ 时，由 $n=2m_1+1=3m_2+1=\cdots$有下表解：

	$5m_3+1$	$5m_3+2$	$5m_3+3$	$5m_3+4$
$n=2m_1+1=3m_2+1$	31	7,37	13,43	19
$n=2m_1+1=3m_2+2$	11,41	17,47	23	29

已得$(7,7^2)$内全部素数，仿此下去可求得全部素数.

本质上讲，上述公式亦属递进式的.其他这方面公式就不多谈了.

5.费尔马素数与尺规作图

在前文中，我们谈到了素数表达式的寻找，这项工作必然会为数学大师们关注，与之相联的问题也就油然而生，其中不乏耐人寻味的杰作，比如：费尔马素数、麦森素数等等.

费尔马(Fermat,P.de)是16世纪法国业余数学家，他虽然一生经商，然而却与数学有着不解之缘.

费尔马30岁起开始迷恋数学，常与当时著名的数学家笛卡儿(Descartes,R.)、麦森(Mersenne,M.)等交流.他一生有过许多重要发现，如“费尔马猜想(大定理)”(现已获证，见[47])、“费尔马(小)定理”等等，有趣的是他的这些成果均是记在他读过的书的空白处.当然，发掘与整理工作是在他去世之后完成的.

费尔马的一些结论是凭借推理(不完全归纳)与直觉获得，因而难免会有失误.

前文我们曾经说过:为了寻找素数表达式,1640 年前后,费尔马验算了表达式

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$(下称该式所给出的数为费尔马数)

当 $n = 0,1,2,3,4$ 时的值分别是:

$$F_0 = 3,\quad F_1 = 5,\quad F_2 = 17,\quad F_3 = 257,\quad F_4 = 65\ 537,$$

它们均为素数,然后他便断言:

对于任何非负整数 n,表达式 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 均给出素数.

大约一百年后,1732 年数学大师欧拉(Euler,L)在研究这个问题时发现:

$n = 5$ 时,$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \times 6\ 700\ 417$ 已不再是素数.

令人失望的是,在 F_n 中,除了 F_1, F_2, F_3, F_4 外,再也没有发现新的这类素数(下称费尔马素数,这个问题我们后文还将详谈).

费尔马数中是否有无穷多个素数?或者有无穷多个合数?这是个至今仍然悬而未决的问题,尽管不少数论专家认为,F_4 之后的费尔马数全为合数.

关于 F_n 为素数的判别问题,佩平(Pepin)给出一个方法:

$$F_n \text{ 为素数} \Leftrightarrow 3^{\frac{F_n - 1}{2}} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, F_n).$$

令人觉得奇妙的是:费尔马素数还与正多边形尺规作图问题有关联.

德国数学家高斯(Gauss,G.F.)19 岁时发现了下面的命题:

正 n 边形可用尺规作图$\Leftrightarrow n \geqslant 3$ 且 n 的最大奇因子是不同费尔马素数之积.

上述命题是说:边数为费尔马素数或它们乘积的倍数的正多边形才可用尺规作出,反之亦然.

顺便一说:高斯的此项发现,使他才"跳进了数学的深河",

虽然他还不曾听到风笛手希尔伯特那甜蜜诱人的笛声.

更为有趣的是:1832 年德国人路利(Lowry,J.)用尺规完成了正 257(F_3)边形的作图;此后海姆斯(Hermes)花费十年光阴用尺规完成 65 537(F_4)边形的作图,这是迄今为止人们用尺规作出的边数最多的正多边形.据说作法装满了几只皮箱,且至今仍保存在德国哥廷根大学图书馆里.这也许是为人类留得的历史财富,至少是珍贵资料.

6.费尔马大定理获证

1993 年 6 月,数学家怀尔斯(Wiles,A.)在剑桥大学作了三次学术报告,题目是"椭圆曲线,模形式和伽罗华(Calois,E.)表示",这些报告的宗旨是向人们宣称:貌似简单却令许多人久攻不下的数学难题——"费尔马大定理"已被攻克.

不幸的是:同年 12 月怀尔斯本人发现了证明的漏洞(在此处之前柯蒂斯(Coates,J.)在一次演讲中也指出怀尔斯的证明有瑕疵.)

一年以后,修补漏洞的工作已由怀尔斯本人和他的学生泰勒(Taylor,R.)共同完成,1994 年 10 月 25 日这一天,他们的论文预印本以电子邮件形式向世界各地散发.

1995 年 5 月《数学年刊》上刊出怀尔斯的"模椭圆曲线与费尔马大定理"和泰勒与怀尔斯共同撰写的"某些 Hecke 代数的环论性质"的论文,从而宣告困扰人们三个多世纪之久的费尔马大定理彻底解决.

什么是费尔马大定理?我们还是先从它的历史谈起.

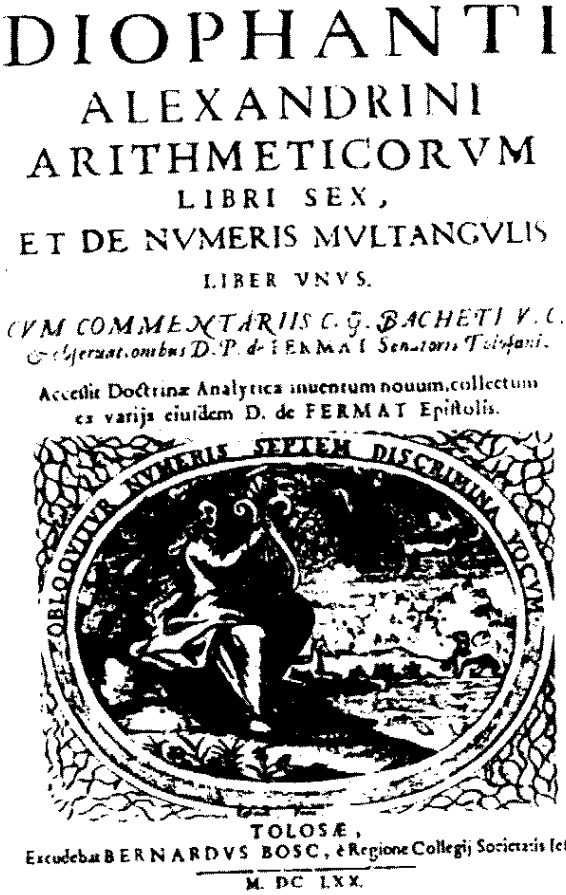
17 世纪法国有位业余数学家费尔马(Fermat,P.de),平时他

有个习惯,总喜欢在他读过的书的空白处写下自己的心得.1630年前后,他在丢番图所著《算术》一书关于勾股数一节的空白处写到:

"将一个立方数表为两个立方数和;一个四次幂表为两个四次幂和;或者,一般地将高于2次幂表为两个同次幂和,这是不可能的".

接着他又写到:"我发现了这个结论的奇妙证明,可惜这儿地方太窄无法写下."

费尔马的发现(人称"费尔马大定理",也称"费尔马猜想")用今日的数学语言可表为:


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& Observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inventum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

带有费尔马批注的丢番图《算术》(1670年版)的封面

$n \geqslant 3$时,方程 $x^n + y^n = z^n$(下称费尔马方程)无(平凡)整数解.

(虽然 $x=0,y=0,z=0$ 是方程的解,但它是平凡的)

费氏的这段迷人的话语倾倒了无数的学子,其中不乏著名的数学家甚至大师.他们在探索"写不下"之谜的同时,也分别对此问题作了许多工作,比如:

欧拉(Euler,L.)对 $n=3,4$ 时的情形给出了定理的证明(1753 年)(一说 $n=4$ 的情形由费氏本人给出);

狄利赫莱(Dirichlet,P.G.L.)、勒让德(Legendre,A.-M.)对 $n=5$ 时的情形也分别给出了证明(1825 年前后);

拉梅(Lame,G.)给出了 $n=7$ 时的命题证明(1839 年);1848 年德国数学家库墨(Kummer,E.E.)对于更大的 n 的情形给出了证明,同时他创新了研究费尔马猜想的方法——分圆域法.利用库默的方法,人们借助于大型电子计算机已证得 $n<10^5$ 时费尔猜想成立.

此前,1975 年阿卡德(Acad,P.N.)证明了猜想当 $n\leqslant 3\times 10^4$ 时成立,次年他又证明了 $n\leqslant 4.5\times 10^4$ 时情形.

然而对一般 n 的情形,人们尚未找到有效的突破,为此法国科学院曾于 1816 年和 1850 年两度悬赏(3000 法朗)以征求问题的解答;同时德国也于 1908 年设奖(10 万金马克,这笔基金是 Wolfskoel 于 1908 年遗赠的)鼓励定理的解答者.遗憾的是:这些奖金一直未能有人幸获.

大约又过了一个多世纪,1983 年原西德的一位年仅 29 岁大学讲师法尔丁斯(Faltings,G.)在猜想证明上有了突破,他证明了与费氏猜想有关的"莫德尔猜想",平面上任一亏格不小于 2 的有理曲线最多只有有限个有理点.由此证明了:

$x^n+y^n=z^n$ 当 $n\geqslant 3$ 时至多只有有限多个有理点.

这个结论在当时曾轰动了整个数学界,他本人也因此于 1986 年获得数学最高奖——菲尔兹奖.

利用椭圆曲线(它是由求椭圆弧长的积分反演而来的,请注意:椭圆本身不是椭圆曲线.椭圆曲线在适当的坐标系内是三次曲线)的理论去证明大定理的思想,源于德国数学家费雷(Frey,G.),他曾于1986年提出:

从 n 是奇数时的费尔马方程的互素解(x,y,z)可得到一条半稳定的椭圆曲线.

此外早在20世纪50年代,日本的谷山丰(Yutaka Taniyama)和志村五郎(Goro Shimura)等人就提出:"每条椭圆曲线都是模曲线"的猜想(谷山—志村猜想).

因而费雷的论断说明,证得谷山—志村猜想,即可证得费尔马大定理.

此后,马祖尔(Mazur,S.)等人在模曲线上又做了许多工作,这一切为怀尔斯的证明铺垫了坚实的基础.

怀尔斯正是综合了上述成果,由证明半稳定时的谷山-志村猜想而推证费尔马猜想的.

费尔马猜想(大定理)的证明将作为数学发展里程中的一个重大事件而载誉史册.

费尔马大定理证得后,有人认为下一个貌似简单但又较难攻克的问题是"$3x+1$ 问题"(详见本书后文"角谷猜想").

此外,所谓的卡特兰(Catalan,E.C.)猜想可视为费尔马大定理的推广,它至未获证.

(Catalan 猜想)若 t,u,v 满足$\frac{1}{t}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}<1$,方程

$$x^t+y^u=z^v$$

只有有限个解,这里$(x,y,z)=1$.

至1995年止,达蒙(darmon,H.)和格兰维勒(Granville,A.)共找到10组解:

t	u	v	x	y	z
1	3	2	1	2	3
5	2	9	2	7	2
3	2	9	7	13	2
7	3	2	2	17	71
5	4	2	3	11	122
7	3	2	17	76 271	21 063 928
3	2	7	1 414	2 213 459	65
3	2	7	9 262	15 312 283	113
8	3	2	43	96 222	30 042 907
8	2	3	38	1 549 034	15 613

又如彼尔(Beal)猜想至今也未获解.

(Beal 猜想)若 t,u,v 至少是 3,且$(x,y,z)=1$,则方程

$$x^t+y^u=z^v$$

无解.

7.哥德巴赫猜想

德国数学家哥德巴赫(Goldbach,C.)长期在俄国圣彼得堡科学院工作.他同其他许多数学家一样对于质数(即素数)、合数(数论)问题的研究极感兴趣(这是一个自欧几里得(Euclid)时代起就一直为人们关注的课题).

1742 年 6 月 7 日这一天,哥德巴赫试图探讨将自然数用质(素)数和去表示的问题,他算到:

$4=2+2$, $5=5$(本身是质数), $6=3+3$,$7=7$(质数), $8=3+5$, $9=2+7$, $10=3+7$, $11=11$(质数), $12=5+7$, $13=13$(质数), $14=7+7$, $15=2+13$, …,$27=3+7+17$,…

上诸式表明:自然数或者本身是素数,或者它可表示为不超过三个素数之和.

当即,他便写信给数学家欧拉(Euler,L.):“我不相信关注那些虽没有证明但很可能正确的命题是无用的.”他写道:“每一个由两个素数和组成的数,都等于许多数的和,这些数的多少随我们的意愿,直到所有的数都是1为止.”(此结论后半部分显然似无意义)例如:

$$4=\begin{cases}1+3 & (2\text{个数和})\\ 1+1+2 & (3\text{个数和})\\ 1+1+1+1 & (4\text{个数和})\end{cases}$$

$$5=\begin{cases}2+3 & (2\text{个数和})\\ 1+1+3 & (3\text{个数和})\\ 1+1+1+2 & (4\text{个数和})\\ 1+1+1+1+1 & (5\text{个数和})\end{cases}$$

$$6=\begin{cases}1+5 & (2\text{个数和})\\ 1+2+3 & (3\text{个数和})\\ 1+1+1+3 & (4\text{个数和})\\ 1+1+1+1+2 & (5\text{个数和})\\ 1+1+1+1+1+1 & (6\text{个数和})\end{cases}$$

接着他又写道:(显然是对上一结论的补充):

“看来无论如何,任何大于2的自然数都是三个素数的和.”(这里他把1视为质数,其实不妥).

以上便是“哥德巴赫猜想”的原始形式,欧拉后来对其进一步明确化.且在回信中写道:“这一命题我认为是相当正确的,虽然我并不能证明这一点.”

英国数学家华林(Waring,E.).在他所著《代数沉思录》中提及上述猜想时对它是这样叙述的:

每个不小于6的偶数都是两个素数之和,每个不小于9的奇数都是三个素数之和.

这也是该猜想的比较完整、确切的叙述.

“哥德巴赫猜想”是一个至今尚未证明的数学命题.我国已故数学家陈景润于1966年证明了:

每个充分大的偶数皆可表示为一个素数与不超过两个素数的乘积之和.

这是迄今为止关于该猜想的最好研究成果,猜想的最终证明,尚需人们的艰苦努力.

这个问题也是“希尔伯特(Hilbert,D.)第8问题”的一部分.

1921年英国数学家哈代(Hardy,G.H.)认为该猜想是当时没能解决的问题中的最困难的一个.

1937年前苏联数学家维诺格拉道夫(Д.М.Виноградов)证明了:

每个充分大的奇数都是三个素数之和.

转年,我国数学家华罗庚证得:

几乎所有偶数皆可表为两素数和.

稍后,有人将猜想命题作了另外转换,且引进殆素数概念:

每个充分大的偶数都是素因子不超过 a、b 两个殆素数和,且记之为$(a+b)$.

关于这方面进展情况见表:

年　代	发　现　者	结　论
1920	布朗	(9+9)
1938	A.A.Бухштаб	(4+4)
1957	王元	(2+3)
1948	A.Rényi	$(1+c)$
1962	潘录洞	(1+5)
1963	潘录洞、巴尔巴恩	(1+4)
1965	维诺格拉道夫等	(1+3)
1966	陈景润	(1+2)

人们在研究哥德巴赫猜想时,曾创立不少方法,它们不仅对

“数论”本身,乃至对整个数学都有着极为深刻的影响.

又据报载:英国费伯出版社和美国布鲁姆斯伯里出版社2001年初曾宣布:

到2002年3月15日止,证得哥德巴赫猜想的人可获100万美元的奖金.

8.角谷猜想

数学中有许多貌似简单的问题,证明起来却极困难(比如欧氏几何中,尺规作图三大难题的不可能性),下面就是一例.

慧眼识金的日本数学家角谷静夫(Kakutani,S.),把美国叙古拉小镇流行的数字游戏发展为角谷猜想,这个猜想说的是:无论你从什么自然数开始,按照一个简单的运算模式,最终必然跌进4→2→1的循环圈.这个令人难以置信的结果,至今无人能证明或否定.

这个游戏源于上个世纪的30年代德国汉堡大学的卡拉茨(Collatz,L.),他是从将数论函数表示成有向图问题开始的,他提出了该问题,但没有发表.

1950年在美国坎布里奇市召开的国际数学家大会上传播过,稍后问题出现了在刊物上.

当然也有传媒认为:二次大战前后,在美国一个叫叙古拉的小镇流行一种数字游戏,后来传到欧洲,曾在那儿风靡一时.1960年前后,角谷静夫将它带回日本,于是就有了本文标题的名字.这个游戏是这样的:

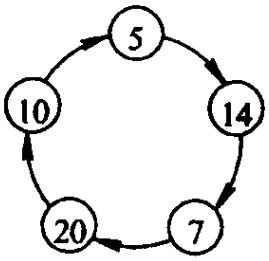
任给一个自然数,若它是偶数则将它除以2;若它是奇数,则将它乘3再加1.……如此下去,经有限步骤后结果必为1(或者视为4、2、1循环).

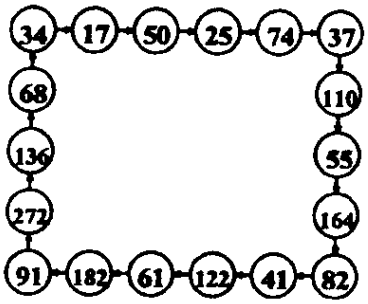
东京大学的米田信夫已利用电子计算机验证了$1\sim2^{40}$(约

1.2×10^{12})间的所有整数,结论都成立,但是这个看上去并不起眼的问题(下称 $3x+1$ 问题*)证明起来却很困难,因而至今未能有人给出(证明或举反例推翻).

有趣的是:若将规则稍加改动,结果将是另一番情景(下称 $3x-1$ 问题):

任给一个自然数,若它是偶数则将它除以 2;若它是奇数则将它乘 3 再减 1.……经有限步骤后,必落入下面两个循环之一:





接下来请你再看一种有趣的运算:对于一个自然数,先找出它的最大奇素因子(包括 1 和它自身),然后将该因子乘 3 加 1.重复上面运算,结果将如何?答案是:4.

请注意:这儿首先是要找出所给自然数的因子(当然一定是素因子),然后从中找出最大的奇素因子(包括该数自身,如果该数是质数的话),然后再将它乘以 3 后加 1 运算.

比如 12 的最大奇素因子是 3,而 $3\times3+1=10$,又 5 是 10 的最大奇素因子,且 $3\times5+1=16$,但 16 的最大奇因子是 1,因而 $3\times1+1=4$.(接下去结果仍是 4)

又如 17 的最大奇素因子是它本身,则它依照上述规则运算结果如下式.

$$17\xrightarrow[17\times3+1]{\text{最大奇素因子是 }17}52\xrightarrow[13\times3+1]{\text{最大奇素因子是 }13}40\xrightarrow[5\times3+1]{\text{最大奇素因子是 }5}$$

$$16\xrightarrow[1\times3+1]{\text{最大奇素因子是 }1}1$$

* 它又有希拉苏斯(Sgracuse)问题、海色(Hasse)问题、乌拉姆(Vlam)问题等称谓.

我们还想指出一点:上述游戏中步骤数(下称路径)与运算过程中的最大值(下称峰值)出现得毫无规律,人们只能预见的是:

随着给定数 N 增大,路径与峰值一般讲会增大,前者增大的慢一些,后者增大的快一些.

请看下面两份资料,它涉及 $3N+1$ 问题的某些数据:

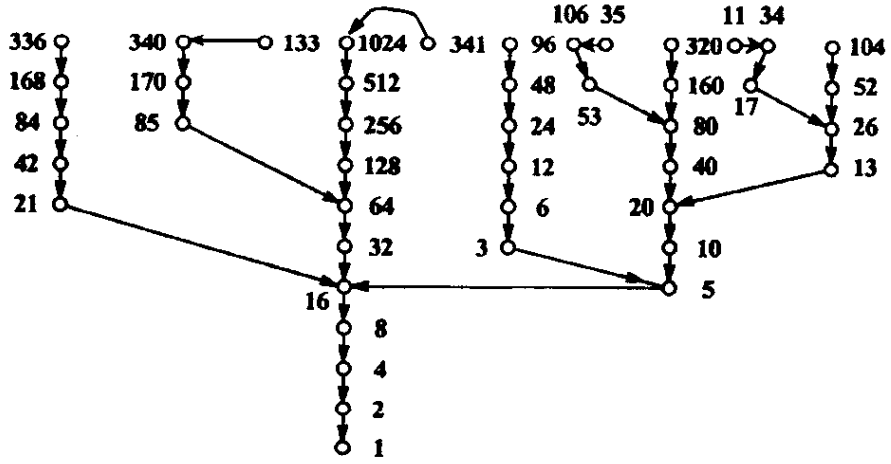
$N=1\sim10^6$ **最长路径序列**

N	路径长	峰值
1	0	1
2	1	2
3	7	16
6	8	16
7	16	52
9	19	52
18	20	52
25	23	88
27	111	9 232
54	112	9 232
73	115	9 232
97	118	9 232
129	121	9 232
171	124	9 232
231	127	9 232
313	130	9 232
327	143	9 232
649	144	9 232
703	170	250 504
871	178	190 996
1161	181	190 996
2223	182	250 504
2463	208	250 504
2919	216	250 504
3711	237	481 624
6171	261	957 400
10971	267	957 400
13255	275	497 176
17647	278	11 003 416
23529	281	11 003 416
26623	307	106 358 020
34239	310	1 897 192
35655	323	41 163 712
52527	339	10 635 020
77031	350	21 933 016

$N=1\sim10^6$ **峰值序列**

N	路径长	峰值
1	0	1
2	1	2
3	7	16
7	16	52
15	17	160
27	111	9 232
255	47	13 120
447	97	39 364
639	131	41 524
703	170	250 504
1819	161	1 276 936
4255	201	6 810 136
4591	170	8 153 620
9663	184	27 114 424
20895	255	50 143 264
26623	307	106 358 020
31911	160	121 012 864
60975	334	593 279 152
77671	231	1 570 824 736

下图也是 $3x+1$ 迭代的某些数据的图形描绘(树图):



某些数的 $3x+1$ 迭代图

近些年来,这个貌似简单的问题引来不少讨论,在人们意识到问题的困难程度之后,有人曾设立诸项奖金以激励人们研究的热情(如:1970 年 H.S.Coxefex 奖赏 50 美元;尔后 P.Erdös 奖赏 500 美元;B.Thwaifes 奖赏 1000 英镑),尽管这些奖金相对于问题难度来讲是微不足道的,尽管已有 20 余篇论文发表,但离问题的最终解决仍是任重而道远.

顺便一提:角谷猜想还可以写成下面函数形式:

$$T(n)=\begin{cases}(3n+1)/2, & \text{若 } n\equiv 1(\mathrm{mod}2)\\ n/2. & \text{若 } n\equiv 0(\mathrm{mod}2)\end{cases}$$

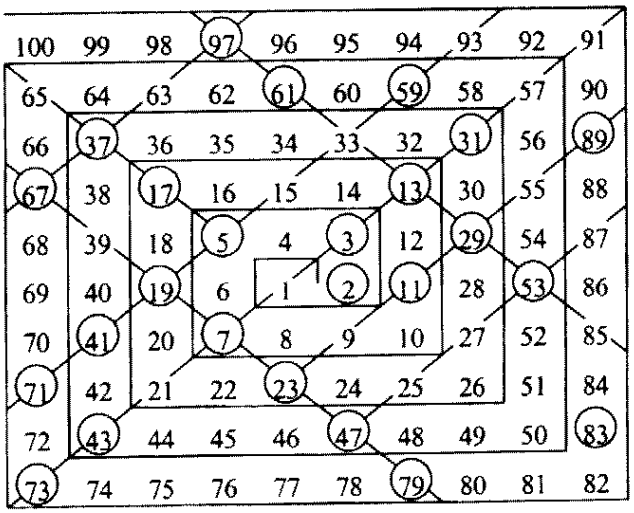
这个问题若从"图论"角度考虑,它是从顶点为某个整数 n 到 $T(n)$的有向图,且称其为 $T(n)$的 Collatz 图(上面的图即是).

9.乌兰现象

数学的发现常常在无意中,但你须留心.

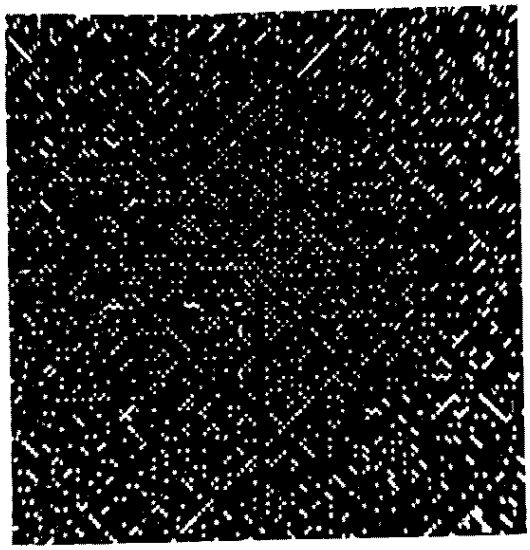
美国数学家乌兰(Ulam,S.)在一次不感兴趣的科学报告会

上，为了打发时光，他从文件包中拿出笔和纸，信手将自然数1，2，3，…依螺旋状写在纸上（如图）.稍后，他又拿起笔将其中的素数（又称质数）一一圈上.



当他眯起眼睛仔细观察他的“杰作”后，不禁惊讶起来：奇怪，这些素数全部分布在某些直线上！

散会后他立即回到办公室，打开计算机，输入他刚刚编好的简单程序，计算机便将1～65 000的全部自然数都依上面螺旋状打印了出来，其中的素数也已分别被圈上，当他再仔细观察后发现：



部分整数打印结果（图中白点为素数）

其中的素数依然分布在某些直线上.

乌兰将上述发现披露之后,人们称之为“乌兰现象”.

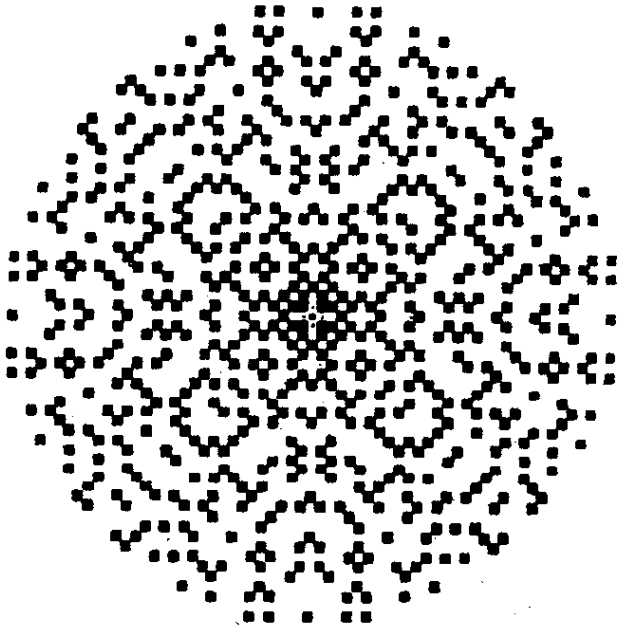
数学家们从乌兰现象中发现了素数的许多新的性质.

其实类似的问题 $x^2 + x + p$ 产生素数的问题,这类问题不少数学家研究过(后文我们还将详述此问题),也得出许多有趣的结果.

比如复数域上的素数称为高斯素数(Gauss 素数),它是最早为高斯所研究的一类素数).

从素数惟一分解观点看,高斯整数 $a + b\mathrm{i}(a, b \in \mathbf{Z})$ 与普通整数类同.形如 $4k - 1$ 的素数也是高斯素数,其它的素数则可分解成高斯素数积.比如 $2 = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i}), 5 = (2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})$ 等.

当我们把 Gauss 素数 $\pm 1 \pm \mathrm{i}, \pm 2 \pm \mathrm{i}, \pm 3\mathrm{i}, \pm 2 \pm 3\mathrm{i}, \pm 4 \pm \mathrm{i}, \pm 5 \pm 2\mathrm{i}, \cdots$ 画在高斯平面上时,结果它们形成了一幅美丽的图案.



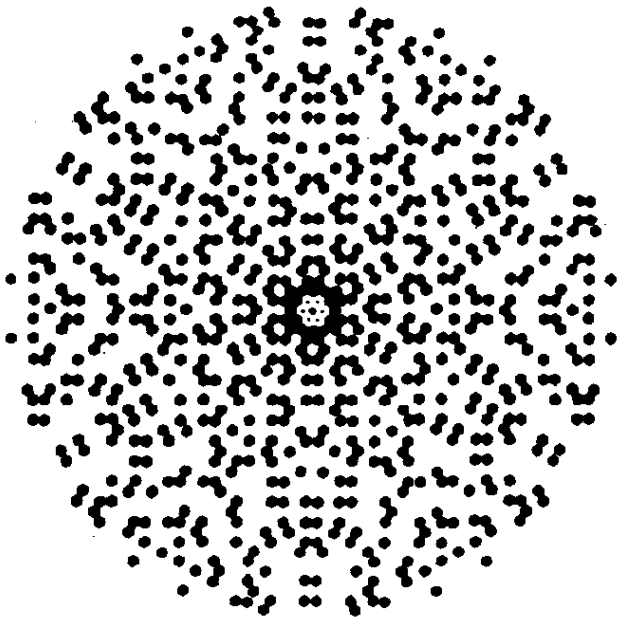
范数小于 1000 的 Gauss 素数

又如爱森斯坦(Eisenstein)整数 $a + b\omega(a, b \in \mathbf{Z}, \omega$ 满足 ω^2

$+\omega+1=0$)具有惟一的分解,用这类素数表示时,在高斯平面形成正六边形(它有六个单位元:$\pm 1, \pm \omega, \pm \omega^2$).素数 2 和形如 $6k-1$(5,11,17,23,29,41,…)的素数仍然是 Eisenstein 素数,但素数 3 和形如 $6k+1$ 的那些素数能被分解,如:

$$3=(1-\omega)(1-\omega^2),\quad 7=(2-\omega)(2-\omega^2),\quad \cdots$$

在含有复三次单位根的域上,Eisenstein 素数也可描绘成漂亮的图形.



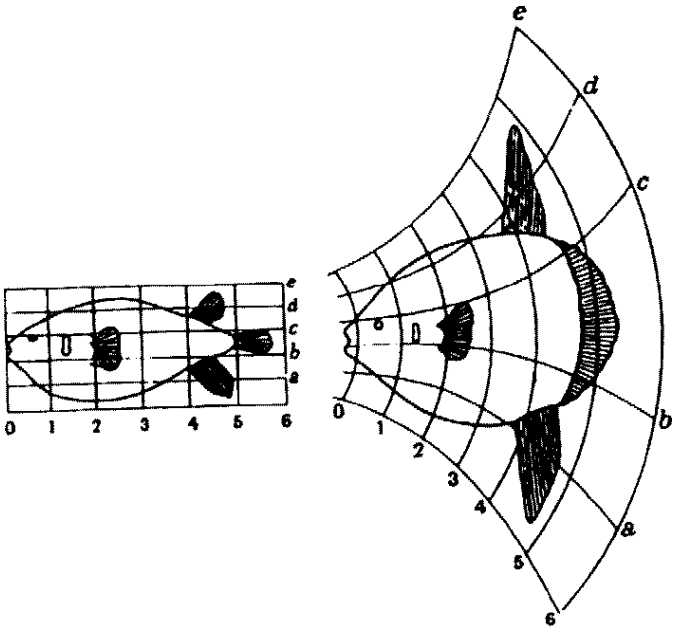
在含有复三次单位根的域上 Eisenstein 素数

二 慎微设问

1.奇妙的蜂房结构

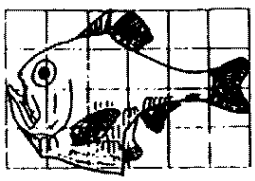
大自然赋予生物的本能，是最令人感慨的.人们认真地观察过各种生物，从中学到了不少本领，揭开了不少奥秘，也领悟了许多真谛.

鱼的外形纵然千差万别，但它们基本形态并无本质差异，不少鱼类不过是它的另一种在另一坐标下的表现(或者说是坐标变换所然).

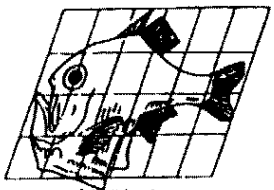


橡皮鱼　　翻车鲀

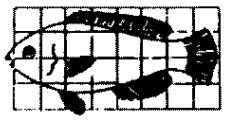
这也是鱼类数十亿年进化，或者自然选择的结果：这种形状利于它们在水中生存、活动、捕食、繁衍、……



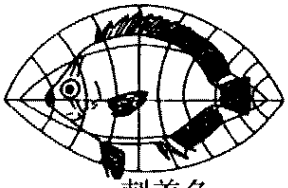
银斧鱼



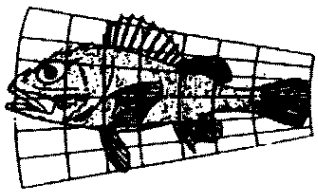
褶胸鱼



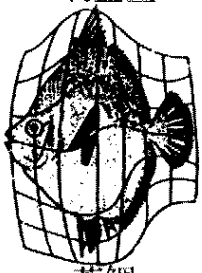
鹦嘴鱼



刺盖鱼

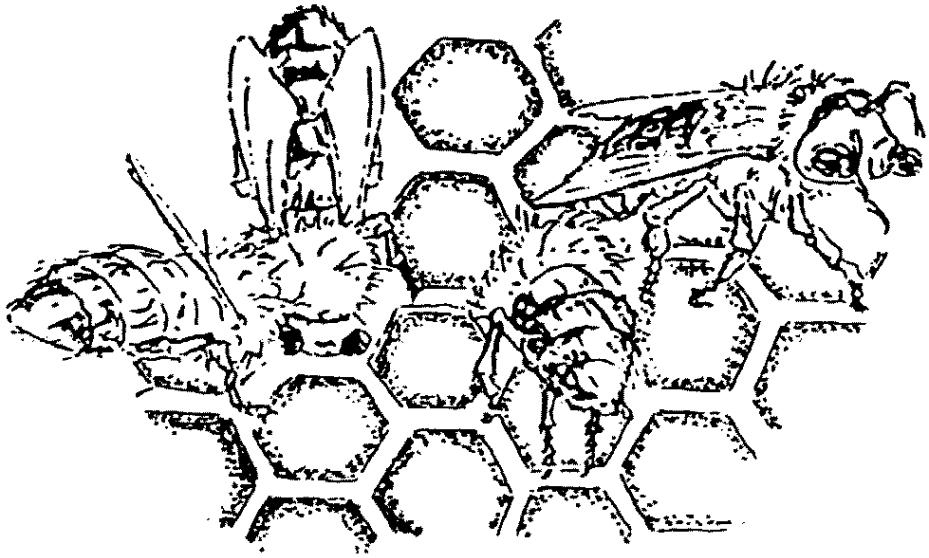


舳



菱鲷

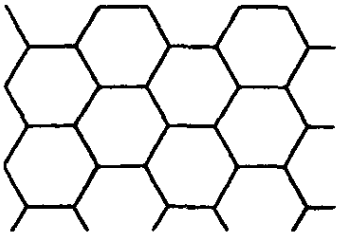
人类也曾关注过蜜蜂及它们的窠穴（蜂房）.



蜜蜂及（蜂房）

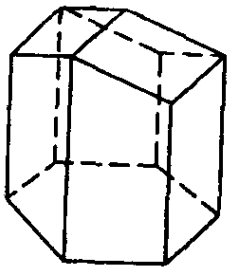
公元前3世纪，埃及亚历山大城的数学家巴普士(Pappus)就曾细心地观察过蜂房的构造，他在其所著《数学汇编》中曾研究过这个问题.他认为：上帝除了将最优秀、最完美的智慧和数学思想赋予了人类外，也将其一部分给了那些无理智的动物，使之有维系生命的本能.这其中最令人感叹和惊异的是蜜蜂.

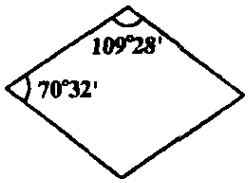
蜂房的奇巧构造是蜜蜂用同样材料所能建造的体积最大的建筑.



从外形上看，蜂房每个房洞都呈正六边形外形(它是可用同一种图形铺满平面的3种正多边形之一，另两种为正三角形和正方形).

再稍稍仔细观察，它们又都是一个个正六棱柱，而棱柱的底却是由三个同样的菱形构成：





德国天文学家开卜勒(Kepler,J.)也对蜂房结构进行过研究，且称之为“菱形12面体”.

法国学者马拉尔弟(Maraldi,G.F.)是第一个将蜂房结构问题提出的人(写入《蜜蜂的观察》一书中)，同时他指出：

构成蜂房底的菱形中一个角为109°28′，另一个角为70°32′.这有何特殊意义？

法国另一位自然哲学家列俄木(Réaumur,R.F.)猜想：这种角度对于蜂房建造来讲是最节省的.

这一猜测为法国数学家寇尼希(Koenig,J.S.)所证实，但是他的结果(菱形的角)与实际测量角度有2′之差.

1743年，当苏格兰数学家麦克劳林(Maclaurin,C.)再次研究

蜂房结构时，得到的最省材料的菱形角分别是 109°28′16″和 70°31′44″，这与实测结果完全吻合.

当人们再次评审寇尼希的工作时发现，他的计算并没有错，而是他当时使用的对数表有误所致，这个错误的发现源于一次海难.

关于这个问题的详细讨论请参阅华罗庚教授的佳作《谈谈与蜂房结构有关的数学问题》.

蜂房的结构已找到了不少奇妙应用，换言之它已被广泛用于建筑、航空、航海、航天等诸多领域.像建筑上的隔音材料造型、飞机发动机的进气孔等，皆仿照蜂房结构而行.

人们至今对蜂房结构兴趣不减，遗憾的是这个早已解决的问题常被新闻一次次炒作.

附录 《科技日报》2000 年 9 月 27 日一则新闻的摘录

美数学家破译“蜂窝猜想”

蜂窝是世界上最省料的建筑物

加拿大科学记者德富林在《环球邮报》上撰文称，经过 1600 年努力，数学家终于证明蜜蜂是世界上工作效率最高的建筑者.4 世纪古希腊数学家佩波斯提出，蜂窝的优美形状，是自然界最有效劳动的代表.他猜想，人们所见到的、截面呈六边形的蜂窝，是蜜蜂采用最少量的蜂蜡建造成的.他的这一猜想称为“蜂窝猜想”，但这一猜想一直没有人能证明.几周前，美密执安大学数学家黑尔宣称，他已破解这一猜想.

蜂窝是一座十分精密的建筑工程.蜜蜂建巢时，青壮年工蜂负责分泌片状新鲜蜂蜡，每片只有针头大小.而另一些工蜂则负责将这些蜂蜡仔细摆放到一定的位置，以形成竖直六面柱体.每一面蜂蜡隔墙厚度不到 0.1 毫米，误差只有 0.002 毫米.6 面隔墙宽度完全相同，墙之间的角度正好 120 度，形成一个完美的几何图形.人们一直疑问，蜜蜂为什么不让其巢室

呈三角形、正方形或其他形状呢？隔墙为什么呈平面，而不是呈曲面呢？

虽然蜂窝是一个三维体建筑，但每一个蜂巢都是六面柱体，而蜂蜡墙的总面积仅与蜂巢的截面有关.由此引出一个数学问题，即寻找面积最大、周长最小的平面图形.1943 年，匈牙利数学家陶斯巧妙地证明，在所有首尾相连的正多边形中，正六边形的周长是最小的.但如果多边形的边是曲线时，会发生什么情况呢？陶斯认为，正六边形与其他任何形状的图形相比，它的周长最小.但他不能证明这一点.而黑尔在考虑了周边是曲线时，无论是曲线向外凸，还是向内凹，都证明了由许多正六边形组成的图形周长最小.他已将 19 页的证明过程放在因特网上，许多专家都已看到了这一证明，认为黑尔的证明是正确的.（摘自 2000 年 9 月 27 日《科技日报》张孟军文）

2.兔生小兔问题引发的数列

1202 年意大利数学家斐波那契（Fibonacci，L.）在其出版的一本名为《算盘书》的小册子中提到“兔生小兔”问题，并引出了一个重要数列——斐波那契数列，这种数列对于不少数学分支均有应用.问题是这样的：

兔子出生后的第 3 个月就能生小兔.假定每月每次不多不少恰好生一对（一雌一雄），若养了一对初生的小兔，试问一年后能繁殖多少对兔子？

我们先来用“笨”方法推推看：

第一个月：只有一对小兔；

第二个月：仍然只有一对小兔；

第三个月：这对兔子生了一对小兔，这时共有两对兔子；

第四个月：老兔子又生了一对小兔，而上月出生的小兔还未长大，故这时共三对兔子；

第五个月:有两对兔子可生殖(原来的老兔和第三个月出生的小兔),共生两对兔子,这时兔子总数为五对;

……如此推算下去我们可以有下表:

月份数	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	…
兔子对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…

故一年后(即第十三个月后)兔子数为233对.

上表下一列数1,1,2,3,5,8,…便是著名的斐波那契数列.如果我们从另一个角度推算你会看到(我们把数列记为$f_1,f_2,f_3,\cdots$):

第$k+1$个月的兔子(数为f_{k+1})可分成两类,一类是当个月刚刚出生的小兔,它们的数目恰好为前一个月(两个月前的兔子数f_{k-1}),一类是上个月的兔子(它的数为f_k),这样便有

$$f_{k+1}=f_{k-1}+f_k(k\geqslant 2),$$

换言之,该数列从第3项起每项均为其前面相邻两项之和(比如$8=3+5,55=21+24$,等等).这是该数列的一个重要性质.

该数列还有许多许多有趣的性质,以至它在许多数学分支中均有应用.比如:

18世纪初法国数学家比内(Binet)给出它通项的无理表达式:

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

1753年希姆松(Simson,R.)发现斐波那契数列前后两项之比可展成连分式:

$$\frac{f_n}{f_{n+1}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}.$$

此外用矩阵等式

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}f_{n+1} & f_n\\ f_n & f_{n-1}\end{pmatrix}$$

可以得到 $f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2=(-1)^n$.

再如人们发现,斐波那整数列:1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,…中有素数 2,3,5,13,89,…等,这种数列的推广即鲁卡斯(Lucas)数列 1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,…中也有素数如 3,7,11,29,47,199,…等.但格拉汉姆(Graham)证明了不存在素数的鲁卡斯数列存在,肯特(Knuth)给出了这种数列中首项较小的$\{u_n\}$:

$$u_0=49463\ 435743\ 205655,$$

$$u_1=62638\ 280004\ 239857,$$

$$u_{n+1}=u_n+u_{n-1},\quad (n\geqslant 1).$$

又比如库恩(Cohn,J.H.E.)证明了:斐波那整数列$\{f_n\}$中仅有 0,1,144 这三个完全平方数.

霍格特(Hoggatt,V.E.)指出:$\{f_n\}$中仅有 0,1,3,21 和 55 这四个三角形数(即$\frac{1}{2}k(k+1)$型数).

1977 年伯格恩(Bergun,G.)和胡甘特(Hoggatt)利用斐波那契数列上述性质解决了一个丢番图(Diophantus)一千七百多年前提出的问题.

丢番图在他的《算术》一书中指出:

数$\frac{1}{16},\frac{33}{16},\frac{68}{16}$和$\frac{105}{16}$中任何两个数之积加 1 均是一个分数的平方,有无这样的整数?

16 世纪,法国数学家费尔马(Fermat,P.de)发现:

整数 1,3,8,120 亦有此性质.

伯格恩等人仔细观察后发现：$1 = f_2$，$3 = f_4$，$8 = f_6$，而 $120 = 4f_1f_3f_5$，于是他们猜想：

f_{2n}，f_{2n+2}，f_{2n+4}和 $4f_{2n+1}f_{2n+2}f_{2n+3}$中任两数之和加 1 皆为完全平方数.

这显然可由前式得到，令 $f = 4f_{2n+1}f_{2n+2}f_{2n+3}$，则有

$$f_{2n}f_{2n+2} + 1 = f_{2n+1}^2,$$

$$f_{2n}f_{2n+4} + 1 = f_{2n+2}^2,$$

$$f_{2n+2}f_{2n+4} + 1 = f_{2n+3}^2,$$

$$f_{2n}f + 1 = (2f_{2n+1}f_{2n+2} - 1)^2,$$

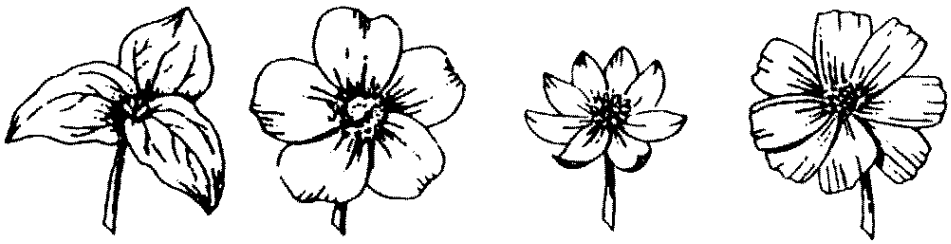
$$f_{2n+2}f + 1 = (2f_{2n+1}f_{2n+3} - 1)^2,$$

$$f_{2n+4}f + 1 = (2f_{2n+2}f_{2n+3} - 1)^2.$$

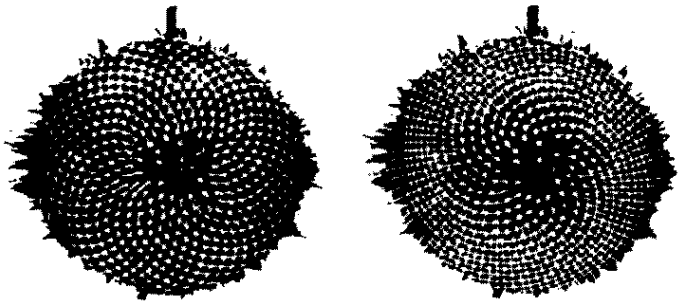
此外，生物学家们还发现，花瓣数也是极有特征的，它们多为：

$$3,5,8,13,21,34,55,89,144,\cdots$$

这些数恰好是斐波那契数列中的某些项.



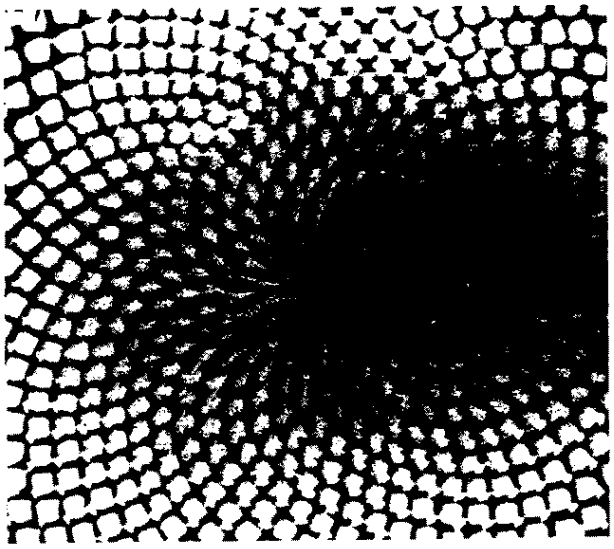
延龄草　　野玫瑰　　血根草　　大波斯菊



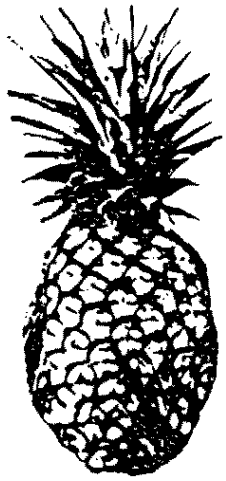
交叉点被着重标出的蓟花

另在向日葵果盘上、菠萝鳞片上、松果皮壳上……也有上述数列的影子，比如松果的皮壳上由两组交错排列的螺线，数一下你会发现：

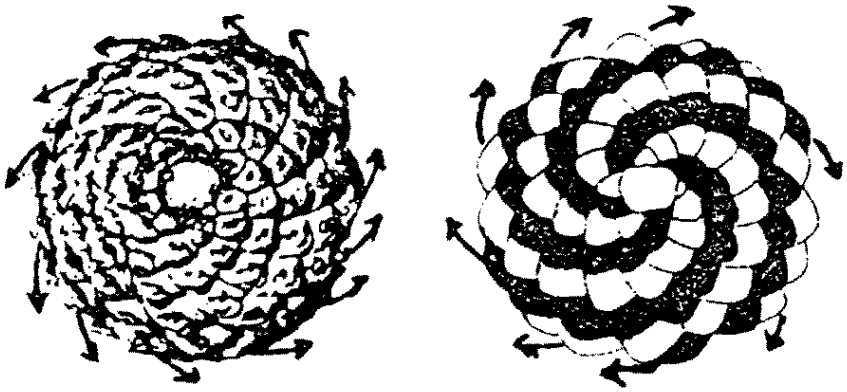
右旋的有 8 条，左旋的有 13 条.



向日葵



菠萝



松果上 8 条右旋螺线和 13 条左旋螺线

（菠萝鳞片及向日葵果盘上也各有两组交错排布的螺线）

人们还发现：斐波那契数列前后两项之比越来越接近黄金数0.618……

$$\frac{1}{2}=0.5,\quad \frac{2}{3}\approx 0.667,\quad \frac{3}{5}=0.6,\quad \frac{5}{8}\approx 0.625,$$

$\frac{8}{13}\approx0.618$，$\frac{13}{21}\approx0.619$　$\frac{21}{34}\approx0.618$，…

18 世纪法国数学家鲁卡斯(Lucas)将该数列推广为满足

$$F_{n+1}=F_{n-1}+F_n \quad (n\geqslant 1)$$

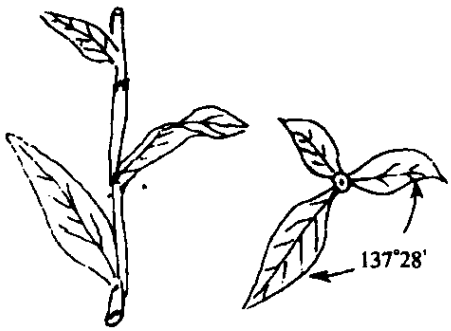
关系的数列(不一定是 1,1 打头)，人称 Lucas 数列.

其实斐波那契数列在诸多方面皆有应用，比如估计股市中股指波动，“优选法”中用于一维搜索，等等.此外它还在物理学晶体分子排布上有用.

生物学中的叶序与斐波那契数列有关，又我们已讲过此数列也与黄金数 0.618…有联系，因而这里想先介绍一下我们后面将要提到的话题，黄金数在叶序上的表现.

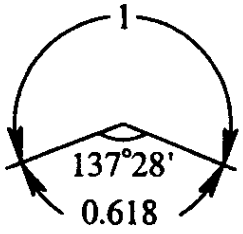
17 世纪初德国科学家开普勒(Kepler,J.)在研究叶序——即植物叶子在茎上排列顺序问题时，意外地发现了一个奇妙而有趣的现象：

首先，植物叶子在其茎上的排布呈螺旋状环绕，尽管每种植物的叶形会因物种而异，但它们的排布方式却呈现许多共同的规律.



比如三叶轮状排布(叶子在与茎垂直平面上的投影如车轮的三根辐条)的植物，它的相邻两叶在茎垂直平面上投影的夹角是 137°28′.

科学家们进一步研究发现：叶子的这种夹角对于植物通风、采光来讲都是最佳的(国外有人仿此设计、建造了仿生楼房，造型奇特不说，它在通风采光上无疑最佳).



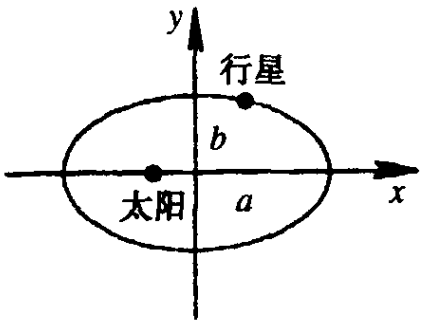
可是你也许不曾想到：137°28′恰好是把

圆周分成 1:0.618…的两条半径之间的夹角(见图).

3.“算”出来的行星

1985 年底,1986 年初,哈雷彗星又来地球“访问”,消息早在几年前已经披露——当然这是靠数学的计算,这一点今天已不再会有人怀疑,因为当今人们不仅能准确地算出彗星哪年临近地球,甚至能算得它哪月哪日在天空何方位,当然也能算出彗星离开地球的日期(1986 年 5 月底).这要是在几百年前几乎是不能想象.由此亦可看出数学的功力(当然也包括天文观测手段).

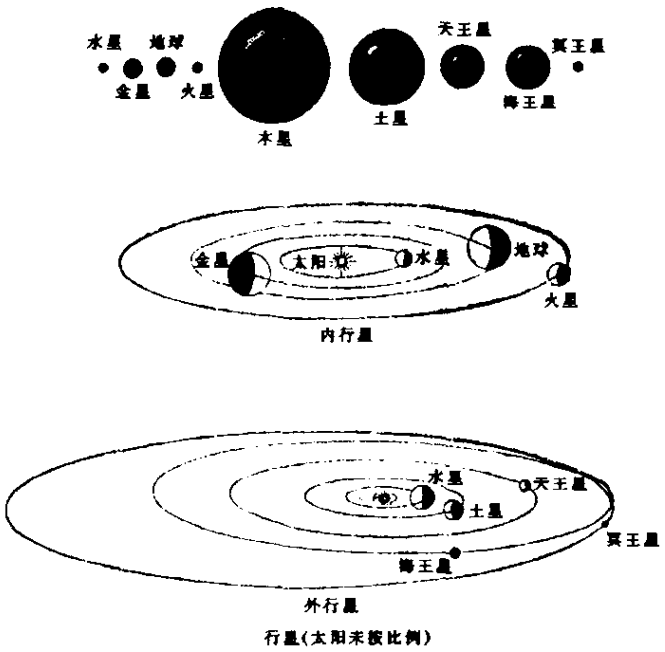
早在 18 世纪,利用数学计算找出太阳系的一颗新星(谷神星)的故事,在当时还是颇为振奋人心的.



1772 年,德国天文学家波德(Bode,J.E.)发现了求太阳与行星距离的法则——波德定律.若设地球和太阳的平均距离为 10,则依此定律可算得当时已知六大行星与太阳的平均距离分别为:

星　　名	水	金	地	火	木	土
与日距离	4	7	10	16	52	100

人们知道:太阳系行星皆绕太阳作椭圆运动:



上表中各数各自减去 4 以后得下面一列数：

0， 3， 6， 12， 48， 96.

细心的读者也许已观察到了它们之间的一些规律：倘若在 12 和 48 之间再添上一个 24 的话，则从第三个数起，后面每个数均为其前面的两倍.

然而事情并没有结束，谷神星直径仅有 770 千米，为地球 6%，木星的 0.55%，在火星与木星之间，大小太不相称.后来人们又在这些空隙里陆续发现许多小星——小行星，数目到目前为止已达两千多个.

1781 年，天王星被发现，人们又算得它与太阳的距离是 192，这恰好是依照上面规律那一列数中 96 的下一个数(但它没有减 4).这一发现引起了人们的极大兴趣与关注，人们也在猜测：

在与日距离为 28 的地方应该有一颗行星.

此外，人们还发现海王星与太阳平均距离为 302，它与按波德规律计算的天王星后面一个行星与日距离 388 稍有差距，这

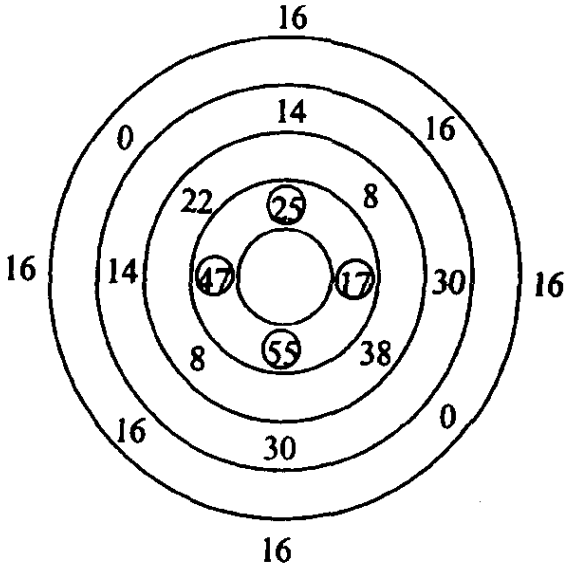
一点基本符合波德规律.

几十年过去了,天文观察家们却一无所获.不久德国数学家高斯(Gauss,G.F.)利用数学公式终于计算出了这颗行星的轨道,这样于1801年12月7日,人们按照数学家的计算,终于找到了这颗行星——谷神星,它与太阳的距离是27.7.

4.杜西现象

1930年的一个冬天,意大利某大学教授杜西(Ducci,E.)坐火车外出,漫长的旅途使他无所事事.

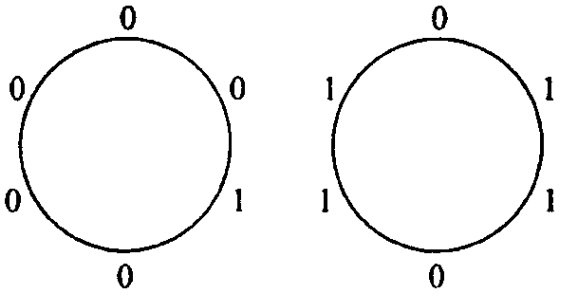
他信手将一只烟盒撕开,用笔在上面画了个圈,然后随意写上四个整数(如25,17,55,47),接着他又画了一个圆圈,并把刚才所写的四个数两两求差(大数减小数)后,分别记在两数中间(还是四个数),重复上面步骤,四步之后他发现:此时的四个数已变得彼此相等.



他又随意找了一些数算算试试,结果都如此,即经有限步骤后,四数都变得相等.

人们把上述发现称之为“杜西现象”(这一点是可严格证明的).

顺便讲一句:对于圆圈上写 5 个、6 个、……数的情形,上述现象不一定再发生,比如下图所给六个数,实施求差运算无论多少步,也不会使它们变得相等.不信的话你可以算算看.



5.柳维尔公式

我们知道,自然数立方和公式:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2,$$

早在两千多年前已为古希腊人发现(后人称其为尼科梅切斯(Nichmachus)公式).

18 世纪法国数学家柳维尔(Liouville,J.)在研究整数分解问题时发现一个有趣的现象:

若自然数 a 有因子 $p_1,p_2,\cdots,p_n$(包括 1 和它自身),而这些因子自身的因子个数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_n$(包括 1 和它本身).这时有

$$r_1^3+r_2^3+\cdots+r_n^3=(r_1+r_2+\cdots+r_n)^2.$$

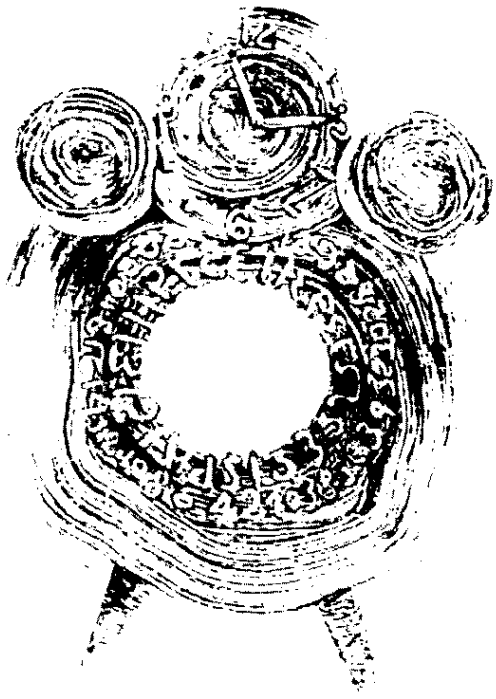
比如:6 有因子 1,2,3,6(包括 1 和它自身),而这些数自身的因子个数分别为 1 个、2 个、2 个和 4 个(1 只有因子 1;2 有因

子 *1*、2;3 有因子 1、3;6 有因子 1、2、3、6).请注意:

$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = 81$,

而 $(1 + 2 + 2 + 4)^2 = 81$.

换言之:$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2$



又如:18 有因子 1,2,3,6,9,18,而这些因子本身的因子数分别为:1,2,2,4,3,6,这时:$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 + 3^3 + 6^3 = (1 + 2 + 2 + 4 + 3 + 6)^2$(请你验算一下).

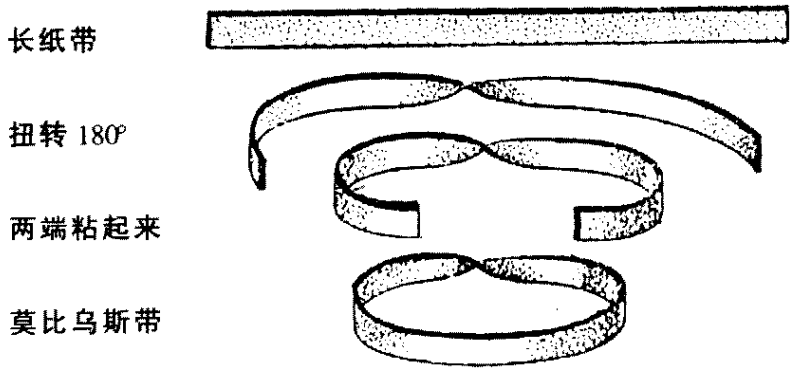
这当然不是巧合,上述公式对任何自然数皆成立.

这件事曾被当作"数论"中的珍奇之一写入美国数学家亨斯贝尔格(Honsberger,R.)的《数学中的智巧》一书中.

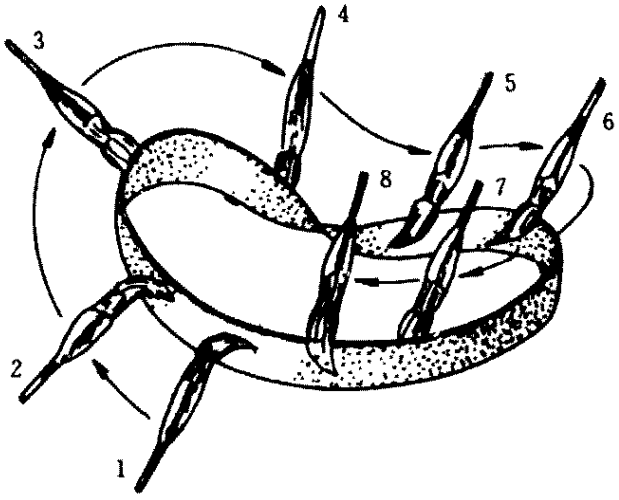
6.莫比乌斯带

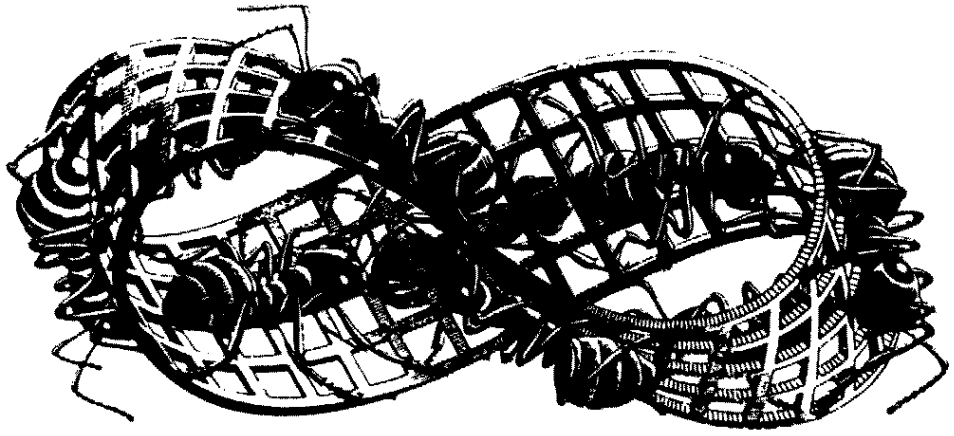
一张纸、一块布,你很容易区分它的正反面(上下面);一只杯子、一个铁筒,你同样容易区分它的里外面.但是,你是否见过仅有一个面(即单侧面)的曲面?

1858 年德国天文学家、数学家莫比乌斯((Möbius,A.F.))在解答法国科学院一则征解有关多面体(每个面都是多边形的几何体)的几何理论时,意外地发现:将一张细纸条扭转 180°后,再将它两端粘起来,这便做成功了仅有一个侧面的曲面——莫比乌斯带:



说它仅有一个面，你若不信的话可拿来一支笔从带子中线（图中虚线所示）上某点出发沿同一方向画下去（笔不离纸）最后仍将回到出发点.

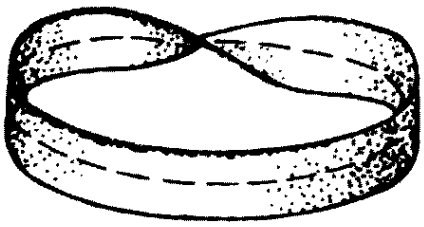




埃舍尔的画《莫比乌斯带》

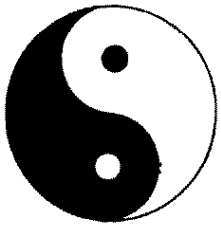
你别小看这个不太起眼的制作，它在数学史上有着重要的地位.此外，它还有许多有趣性质，比如(请你动手做一下)：

沿带子中线将它剪开后，得到一条扭了两圈的莫比乌斯带(长度增加一倍，宽为原带的一半).

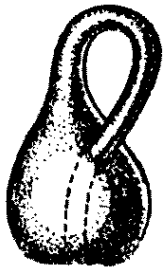


沿带子三分之一宽处分别将带子剪开，你可得到一个扭了两圈的莫比乌斯带(宽为原带的1/3，长增加一倍)且套上一个细莫比乌斯带(长未变，宽为原带的 1/3).

有人甚至认为莫比乌斯带在平面上投影图形恰好是我国《易经》中阴阳鱼图形(又称太极图).



易经中的太极图

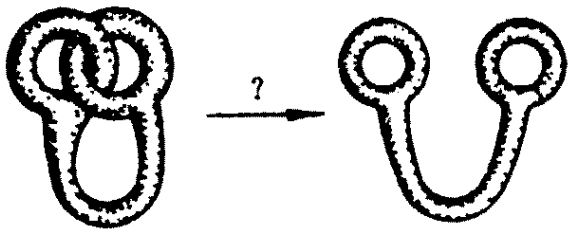


克莱因瓶

1882 年德国数学家克莱因(Klein，(c.)F.)将莫比乌斯带推广到了几何体，他构造了也仅有一个面的克莱因瓶.

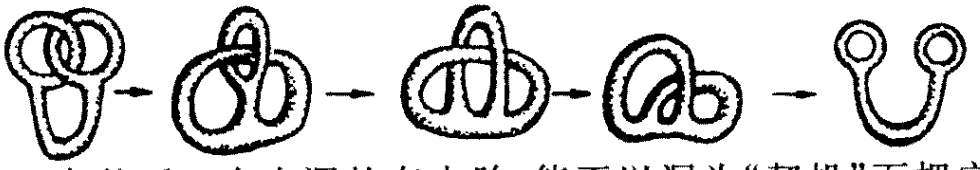
由于上面问题的提出和研究，因此产生了一门新的数学分支——拓扑学.

图形在不被割裂而实施任意伸缩、扭曲变形时不改变的性质被称为“拓扑性质”.比如下图中的(A)、(B)两个几何体从拓扑观点看是相同(等价)的(尽管乍看上去它们并不一样)：



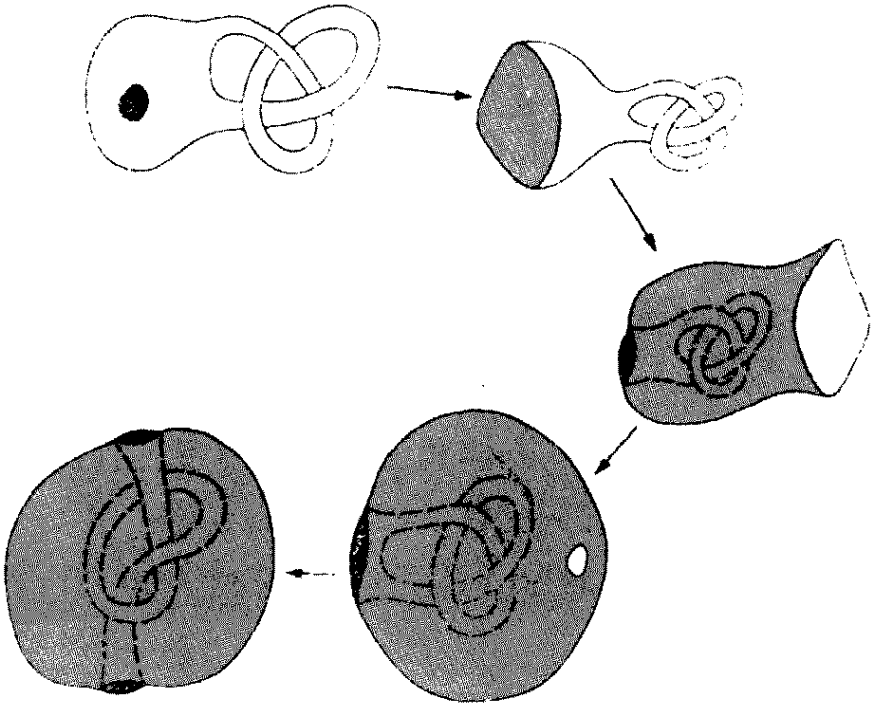
(A)　　(B)

我们可以把上面几何体想像成用橡皮泥做的，那么在不裂坏它们形状的前提下实施下面一系列变换便可将(A)变成(B)：



一条扎了一个小洞的车内胎，能否以洞为“契机”而把它的“里面”翻到外面来？

假设车内胎弹性极好，那么我们只须依照下图的模式操作，这一愿望便可实现：



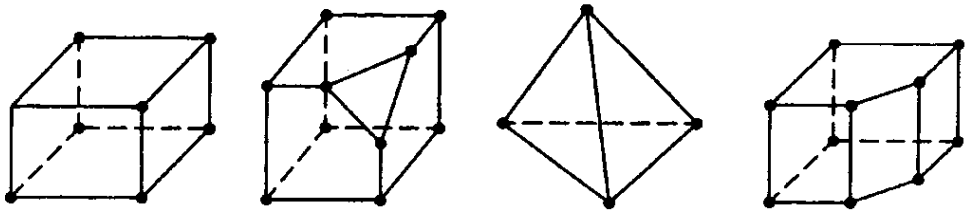
有洞轮胎里外翻转的拓扑变换

7. $V+F-E=2$——欧拉公式

我们生活在三维空间，当然会遇到许多许多形态各异的几何体，其中最常见的是多面体——每个面皆由多边形组成的几何体.

多面体尽管形态各异，却有着一些共同的通性，找出它们正是数学家们孜孜以求的目标.

1750年一个阴雨连绵的日子，数学家欧拉(Euler, L.)坐在桌前，摊开书本，拿起纸、笔又在演算数学问题——这是一道涉及长方体的立体几何题目.演算完毕，他漫不经心地看着所画图形且计算着该长方体中顶点数8、面数6和棱数12间的关系.



(1)　(2)　(3)　(4)

思来算去他发现：8+6−12=2.随后眼睛一亮：这也许正是这类几何体的共性？

接着欧拉又从去角立方体和三棱锥中发现(图(2))：

顶点数+面数−棱数=4+4−6=2.

他又找来几个(凸的)几何体一一计算后发现，对(凸)多面体而言：

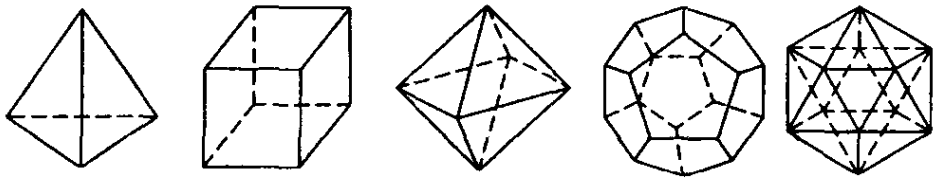
顶点数(V)+面数(F)−棱数(E)=2,

即 $V+F-E=2$.随即他便将此发现写信告诉另一位数学家哥德巴赫(Goldbach, C.)，信中流露出他发现此公式时的惊喜.

不久(1751 年)欧拉严格证明了上述公式——人称它为欧拉公式.数学界将 $V+F-E=2$ 称为欧拉示性数.

欧拉公式有许多重要应用,比如用它可以证明:

正多面体(每个面皆为全等的正多边形的几何体)仅有下面五种(见诸图):



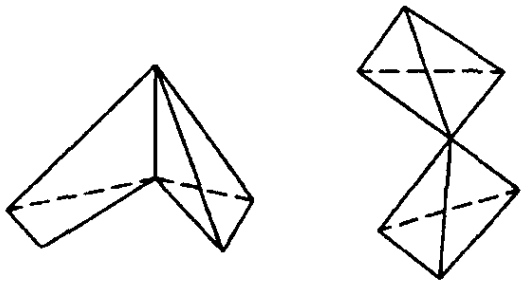
正 4 面体　　正 6 面体　　正 8 面体　　正 12 面体　　正 20 面体

它们各自的顶点、棱、面数见下表:

名　　称	V	E	F	$V-E+F$
正 4 面体	4	6	4	2
正 6 面体	8	12	6	2
正 8 面体	6	12	8	2
正 12 面体	20	30	12	2
正 20 面体	12	30	20	2

我国旅美著名数学家陈省身先生说:欧拉示性数 $V-E+F$ 是大量几何课题的源泉和出发点.

这儿还应指出一点,欧拉公式并非对所有多面体都成立,请看 1832 年赫塞尔(Hessel,F.)给出的两个例子,在那儿 $V-E+F=3$.换言之,欧拉公式只对简单凸多面体真(1893 年庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)修改).



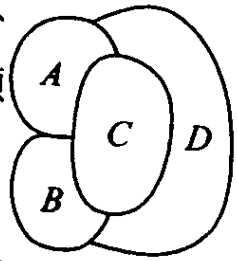
赫塞尔给出的使欧拉公式不成的反例

8.四 色 定 理

1852年秋,刚从伦敦大学毕业的青年数学家古色利(Guthrie,F.)望着一张挂在墙上的英国地图发呆,他边数着英国的行政区划、边查找它们的位置,同时还注意该区域的地图着色,看着看着他突然发现:该地图仅用四种不同颜色便可将图中任何两相邻区域区分开.

古色利无法解释这一现象,于是他写信给仍在大学读书的弟弟,让他向该校有名的数学家棣·莫根(De Morgan,A.)请教.

棣·莫根首先注意到:区分地图上的不同区域少于四种颜色不行.比如右图所示四个区域仅用三种颜色无法将它们彼此区分开(请你画画看).



遗憾的是:棣·莫根本人也未能解决此问题.

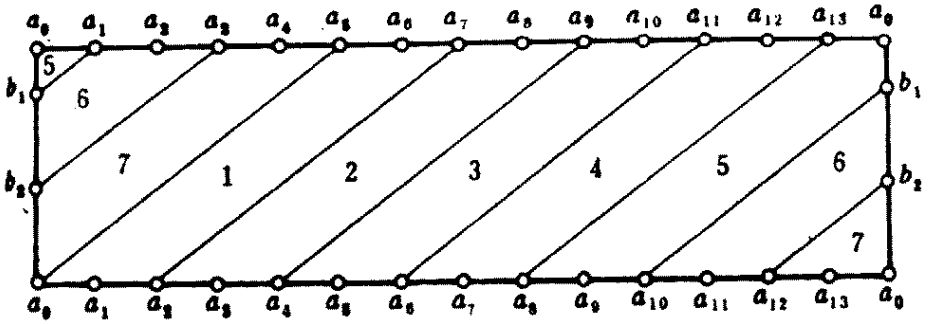
1878年,英国数学家凯莱(Cayley,A.)在伦敦数学年会上正式提出该问题——平面或球面上的地图仅需四种颜色可将任何相邻的两区域区分开——且征求解答,人称"四色猜想".

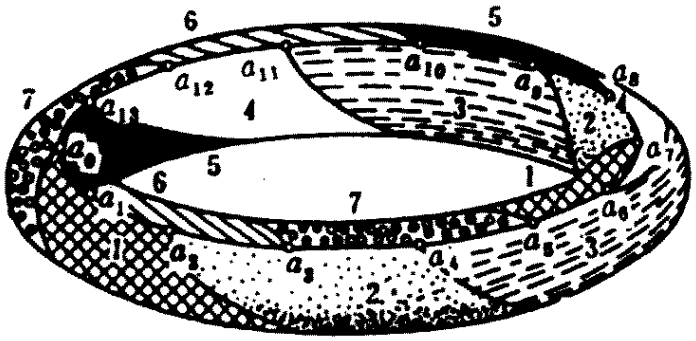
次年,英国律师肯普(Kempe,A.B.)发表了宣称证明四色猜想的文章,不幸的是:十一年后希伍德(Heawood,P.J.)发现文章有一个严重错误.尽管如此,肯普创立的解决此问题的方法却给了人们以极大启示.

尔后,希伍德在肯普方法基础上开始了猜想的研究,整整60年过去,但他仍未能攻下这个貌似简单的四色猜想.所幸的是:他在其研究中的副产品颇丰,比如他证明了:

环面(如充气自行车内胎)上的地图仅需七种颜色便可将其

上面任何两相邻区域区分开，且少于七种不行.





这之后又陆续有许多数学家从事猜想的研究，但进展缓慢，结果只是局部的，即对区域数是有限的某些数的情形给出了完整的证明，下表列举了部分数学家的研究成果：

年　份	研　究　者	图形区域数 K
1913	伯克霍夫(Birkhoff, G.D.)	$K\leqslant 22$
1922	弗兰克林(Franklin, P.)	$K\leqslant 25$
1926	雷诺德(Reyneaudt)	$K\leqslant 27$
1938	弗兰克林	$K\leqslant 31$
1950	文恩(Winn)	$K\leqslant 35$
1970	奥尔(Ore, O.)	$K\leqslant 40$
1973	米尔(Mayer, J.)	$K\leqslant 48$
1974	斯特朗奎斯(Stromquist, W.)	$K\leqslant 52$

直到1976年初，人们仅对区域数是96的地图着色的四色猜想给出证明.但这对区域数是一般自然数的情形来讲远远不够.

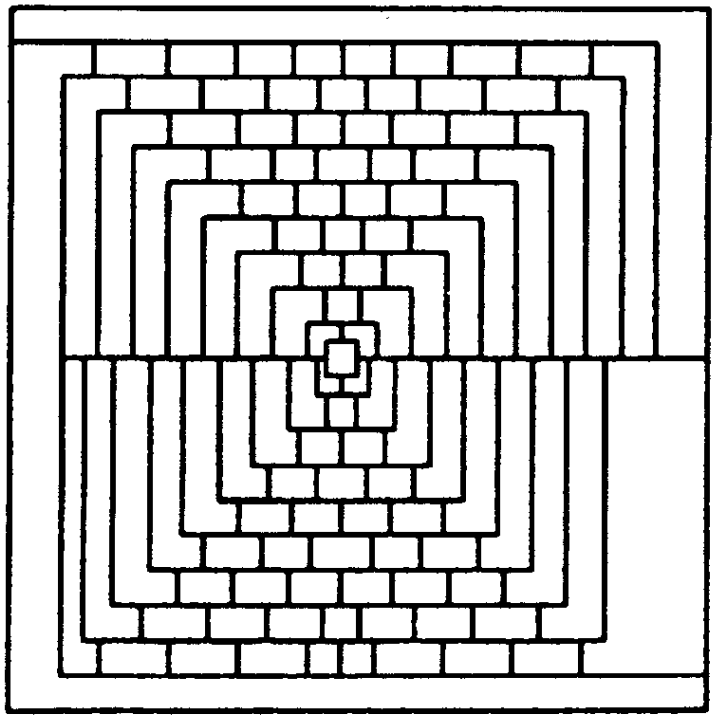
20世纪70年代初德国数学家希斯(Heesch, H.)提出了解决

四色定理(寻找所谓不可约图)的“放电算法”,为此人们将注意力转移到电子计算机上,希望借助它来完成一般地图着色的四色猜想证明.

1976 年 6 月,美国伊里诺斯州大学的黑肯(Haken,W.)和阿佩尔(Appel,K.I.),经过四年的艰苦工作,终于在计算机帮助下完成了四色猜想的证明(共花费 1 200 个小时的机上时间,进行 60 亿个逻辑判断).因而猜想变成了定理.

为此伊里诺斯州地方邮局还发行了首日封,纪念这个困扰人们一个世纪之久的问题的解决,邮戳上刻着“四种颜色就够了”(FOUR COLORS SUFFICE).

下边是美国游戏大师马丁·加德纳(Gardner,M.)造出的一个较难的用四色去处理的“地图”,如果有兴趣你不妨动手用四种颜色涂涂看.



附注 人们在庆幸“四色猜想”证明的同时,也出现许多不谐调的故事,下面是一则新闻报道,足见报导者对该问题的无知:

高级工程师宋×× 历时5年

攻下国际著名数学难题
绘出世界首张四色地图

本报讯 据《内蒙古日报》消息：包头钢铁设计院高级工程师宋××证明了世界著名数学难题“四色问题”，并绘制了世界上第一张四色地图.

“四色问题”是英国人古里斯1852年首先提出来的，它的原意是“在一张纸上的地图能否用四种颜色可使其共同边界的国家有不同的颜色。”从那时起，历经一个多世纪，世界上有许多数学家探讨此问题，尚未能用一种数学方法，求得其证明，随之成为世界著名数学难题.

宋××50年代初毕业于东北工学院.从1972年起他开始对“四色问题”进行求证，1976年即证明了“四色问题”，并绘制了世界上第一张四色地图.他将论文和地图寄给《数学学报》，一直未得回音.在此之前，世界上不少人用“走迷宫”的办法绘制四色世界地图，最多也只绘出了36个国家，便再绘不下去了.最近，宋××的研究成果终于引起了有关方面的重视.内蒙古人民出版社决定出版宋××的《邻接几何——四色问题和普遍着色的证明》一书.地图出版社已于去年年底印刷出了四色地图初样.

（摘自《天津日报》 1987年11月17日）

9.孤立波由来

1834年8月的一天，26岁的英国造船工程师罗素（Russell，J.S.）骑马郊游，他顺着格拉斯哥运河前行.

突然他被河中出现的奇怪水波惊呆了.

那是两匹马拉着的拖船在河上快速行驶，不知何故船突然停了下来，只见船头的河水激烈地扰动着，猛地形成一个圆弧形的、平滑、轮廓分明的巨大孤立波峰，它长约30英尺，高约1～1.5英尺，且急速驶离船头滚滚向前.在行进中它的形状和速度并不改

变.

罗素策骑紧追,只见那波峰以每小时八九英里速度前进,且一直保持着原始形状.波峰行进了大约两英里后才渐渐消失平息下来.

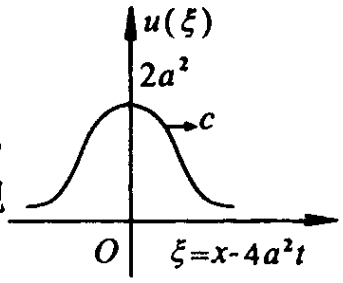
十一年后,罗素在"英国科学促进会协会第14届会议"宣读他的"论波动"的论文中,对他的发现作了上述描述,罗素还解释道:

"这不是被切开的通常的水波,因为那种通常水波前进时,总是一部分高出水面、一部分低于水面,并且它的形状迥然;同时它也不是半个波,因而它有完整的形状,且全部在水面上."

罗素称它为"孤立波",且耗去大量时间与精力试图解释它,然而终未能如愿,他希望"将来的数学家"能圆满解答这个问题.

六十年后(1895年),柯特维克(Korteweg)和德弗里斯(de Vries)在研究单向运动浅水波时,建立了一个非线性偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \quad (\text{KdV 方程}).$$



1965年美国数学家萨布斯基(Zabusky, N.J.)等对上述方程进行数值研究时,发现了它的一种孤立峰状的行波解(特解):

$$u(x,t)=2a^2\operatorname{sech}[a(x-4a^2t)] \qquad (*)$$

具有出人意料的稳定性:两种这样的波在经过非线性作用(如碰撞)后,彼此外形与速度都不变.

若令 $\xi=x-4a^2t$,则(*)化为

$$u(\xi)=2a^2\operatorname{sech}a\xi,$$

它的图象如上(从图上知该波振幅为 $2a^2$,以速度 $4a^2$ 随时间演变而传播.

它正是罗素所观察到的孤立波，它是许多非线性波发展型方程的一类具有粒子性态的解，且称之为“孤立子”.

近些年来，孤立子已在物理、化学、生物学找到广泛应用.

1984 年 11 月，在美圣地亚哥召开的美国声学学会大会上，加州大学的我国访问学者吴君汝等人介绍了他们发现的一种浅水孤立波，且用实验模拟了这种波.

10.四元数的产生

复数的出现可谓数学史上的一个重大发现.据载：

1484 年法国数学家舒凯(Schuke)在其《算术三篇》中谈及解一元二次方程 $x^2-3x+4=0$ 时得根：

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4},$$

但他声明这不可能，因为负数没有平方根.

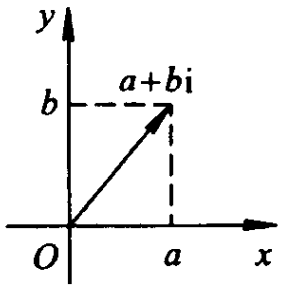
1545 年意大利数学家卡丹(Cardan,J.)在其《大法》一书讨论了方程 $x^2-10x+40=0$ 的解时大胆地给出：$5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$，这实际上宣告了复数的诞生，尽管他当时称之为“诡辩量”.

1572 年意大利人邦别利(Bomberi)进一步讨论了虚数.

直至 1747 年法国数学家达朗贝尔(d'Alembert,J.le R.)才明确提出复数概念.

1777 年，欧拉(Euler,L.)系统地建立了复数理论，用 i 表示复数单位.

复数的几何表示先后由英国人瓦里士(Wallis,J.)、挪威人默塞尔(Mosel)、瑞士人阿尔冈(Argand,J.R.)等人给出，最后由高斯(Gauss,G.F.)所确认，故复数平面又称高斯平面(Gauss 平面).



这样复数 $a+b\mathrm{i}$ 就与高斯平面上一个点一一对应起来.

英国数学家哈密顿(Hamilton, W. R.)还将复数 $a+b\mathrm{i}$ 看成高斯平面上的数偶(a,b),这样

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$$

可写成数偶(向量)形式

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

哈密顿希望将复数概念推广到3维、4维、……首先这种数要适合所谓"模法则",即该种数的模适合:两数的乘积的模恰好是该两数模之积.

比如对3维中的这种数 $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}$ 和 $x+y\mathrm{i}+z\mathrm{j}$ 的模应满足

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=u^2+v^2+w^2.$$

这显然与整数表为四整数平方和问题(这一点我们后文还要介绍)有关,换言之,对 $8n+7$ 型的整数来讲,必须用四个完全平方数之和才能表示(法国数学家勒让德(Legendre, A. M.)曾在其大作《数论》中指出:$3=1^2+1^2+1^2$, $21=1^2+2^2+4^2$,但 $3\times21=63$ 却无法用3个完全平方数和表示).

哈密顿向4维空间考虑,即希望找到符合上述要求的四元数.

朝思暮想,15个年头过去了……

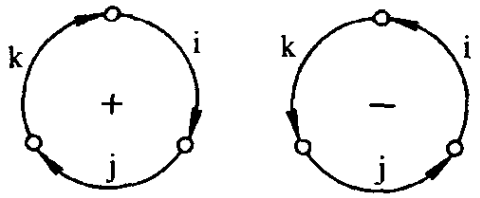
1843年10月16日,哈密顿与妻子在都柏林的皇家运河边散步,突然他停下脚步急忙从怀中掏出笔记本记下了:

形如 $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ 的数,且写到:

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1,$$

$$\mathrm{ij}=k,\quad \mathrm{jk}=\mathrm{i},\quad \mathrm{ki}=\mathrm{j}$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$



就这样“四元数”概念产生了,这种数的乘积关系还可用下面乘法表表示:

i,j,k 乘法表

x	i	j	k
i	−1	k	−j
j	−k	−1	i
k	j	−i	−1

四元数的产生曾使哈密顿兴奋不已,他在日记中写道:

1843 年 10 月 16 日,当我和 L.Hamilton(哈密顿夫人)步行去都柏林途中来到布尔翰桥的时候,它们就来到了人世间……此时我感到思想的电路通了,从中落下的火花就是 i,j,k 之间的基本方程.我当场抽出了笔记本,就将这些作了记录……

如今,在布尔翰桥上,人们树立了一块小纪念碑,上面刻道:

这里在 1843 年 10 月 16 日当 W·哈密顿爵士走时,天才的闪光发现了四元数的乘法基本公式:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

他把这结果曾刻在桥石上.

这之后人们又开始新的超复数的找寻.

格拉威斯(Graves,J.T.)曾创立了 8 个单元的超复数即“8 元数”(数学家 Cayley 也做了同样的工作).但其对乘法已不满足结合律.

1848 年,柯克曼(Kirkman,T.P.)证明了不存在 16 个单元的

超复数.

尔后高斯曾猜测:保持复数基本性质的复数系不能再扩张下去.这一点后来被外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.)、狄台金(Ditkin,V.A.)所证明.

此前(1870年)美国人佩尔斯(Peirce,B.)认为:满足某些条件的超复数系统扩张不能是无限的.

之后,德国数学家弗罗伯尼(Frobenius,F.G.)给出了更强的结论:

具有有限个单元的有乘法的实系数线性结合代数系统且服从结合律的,只有实数、复数和四元数.

四元数虽然抽象,但它与我们的时空世界是非常协调的(一个物理点需要四个实数才能描述:其中三个描述点的空间位置即坐标;第四个数表示事件发生的时间).爱因斯坦(Einstein,A)相对论已证明:空间和时间是相互关连的,它们彼此不能分离而存在,这种统一的四维世界可用"四元数"很好地刻划出来.

此外四元数可用于某些星系运行研究,在光学问题也有其独特的用途.

11.阿贝尔公式的发现

1802年,阿贝尔(Abel,N.H.)出生在挪威奥斯陆附近的芬岛的一位牧师家庭,幼年时代已显露出数学才华,虽然因家境贫寒未能接受系统的教育,到13岁时才进入一所教会学校读书.15岁时,他幸运地遇到一位优秀的数学教师,这对于他后来的成长起了至关重要的作用.良师的谆谆教诲,使他很快读完初等数学课程,并开始攻读高等数学,同时研读了许多数学大师如欧

拉(Euler,L.)、高斯(Gauss,G.F.)、拉格朗日(Lagrange,J.-L.)等人的著述.

1821年秋,阿贝尔考入奥斯陆大学,大学毕业后(1925年)去德国柏林,在那儿他结识了《纯粹数学和应用数学》杂志的创始人克雷尔,且在杂志上发表了大量论文(仅杂志的前三卷就有22篇),他的工作开始为欧洲大陆的数学家们所关注.

1826年阿贝尔来到巴黎,拜见了柯西(Cauchy,A.-L.)、勒让德(Legendre,A.-M.)等著名数学家,年底他回到了柏林,不幸染上肺结核病,加上他谋求的教授职位未果,不得已于次年5月返回家乡奥斯陆.

1829年,四名法国科学院院士联名举荐上书挪威国王,请他为这位天才安排一个合适的职位.4月8日,当柏林大学的教授聘书下达时,阿贝尔已于两天前谢世,享年27岁.

阿贝尔的主要贡献在方程论、无穷级数和函数论的研究上,其中最著名的是"高于四次的一般代数方程没有根式解"的研究.

所谓方程的根式解,即是由该方程系数经有限次加、减、乘、除及开整数次方运算表示的解.

一次、二次代数方程的根式解(求根公式)早在数百年前已为数学家们得到,而16世纪初,人们也已找到了三次、四次方程的求根公式,以后几个世纪人们一直试图寻找五次代数方程的求根公式,然而始终未能成功.

1824年阿贝尔首先作出了一般五次方程用根式不可解的严格证明,从此也开拓了数学中的一个崭新领域"群论"的研究.

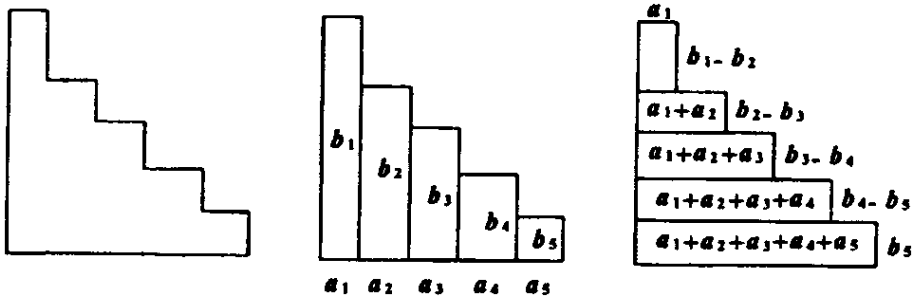
一天,阿贝尔在演算一道函数的积分时,百思不得其解.几天后,他只好换个角度从另外方向努力,当已"山穷水尽"之时,却偶然发现了"柳暗花明"的奇境,是下面的公式(后人称之为阿

贝尔公式)给了他意想不到的成功.

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n$$
$$= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)b_n$$

这个公式看起来形状怪异,验算起来并不困难(可从式右入手,去括号化简可得式左),使用起来却很方便,可问题是:阿贝尔是如何发现它的?

想法其实不难,他只不过是用了两种不同方法去计算下面阶梯形图形(1)的面积(这里仅给出 $n=5$ 的情形):



(1) (2) (3)

方法一:从图(2)可以知道该图形面积是:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5,$$

方法二:从图(3)中可用另外一种方法计算该图形面积:

$$a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_4 - b_5) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)b_5.$$

这样便得到前面的公式,阿贝尔公式在高等数学中甚有用途.

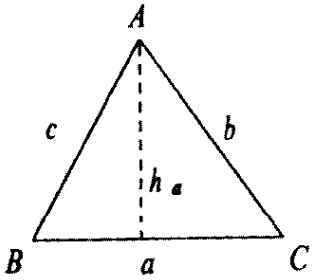
三 追求完美

1.海伦公式

海伦(Heron)为约公元一世纪前后之人,曾活跃于古埃及亚历山大城.父亲(又一说是其老师)是位机械发明家,曾发明了用水力驱动的各种机械.

海伦对几何学有着浓厚的兴趣,他尤爱研读欧几里得(Euclid)的《几何原本》.

一天他正在考虑已给三边的三角形面积计算时发现:欧氏的算法是先由三边去求三角形某边上的高,然后再求其面积:

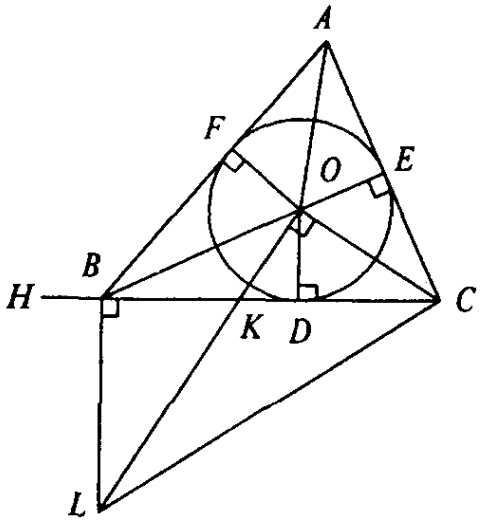


$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} a h_a .$$

这不仅繁琐,同时还要考虑$\angle A$是锐角、还是钝角,再分别处理.有无直接算法?想到这儿,海伦决心寻找到一个能够利用它去直接计算已给三边长的三角形面积的公式.

长时间的考虑与研究使他变得消瘦.一个阴雨的下午,这道几何证明题的解决,终于使他的问题有了转机(果然是苍天不负有心人),他通过几何推演(见下页图,过程这儿从略)终于找到了下面的关系式:

$$(HC\cdot OD)^2 = HC\cdot HB\cdot BD\cdot DC.$$



这里式左：

$HC=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)=\frac{1}{2}(a+b+c)=s$(周长之半)，

$OD=r$(内切圆半径)，则 $HC\cdot OD=S_{\triangle}$.

式右的 HC, HB, BD, DC，恰好分别是 $s, s-a, s-b, s-c$.

这样 $S_{\triangle}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，此即平面几何有名的用三边长求三角形面积的海伦公式.

顺便讲一句：大约一千年后，我国数学家秦九韶得出(在《数书九章》中)一个与之等价的三角形面积公式(他从另外角度推演，且以另一种形式给出)：

$$S_{\triangle}=\sqrt{\frac{1}{4}a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$$

(这与海伦公式等价吗？请你验算一下).

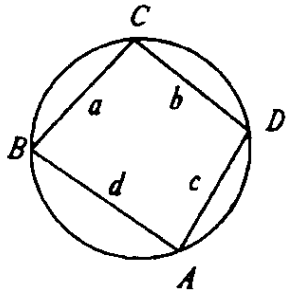
公元六世纪，印度数学家波罗摩笈多(Brahmagupta)将海伦公式推广到圆内接四边形的情形：

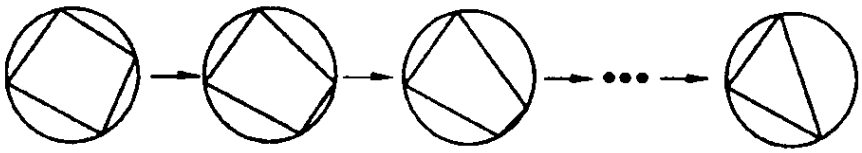
若 a, b, c, d 是圆内接四边形的四条边，记 $s=\frac{1}{2}(a+b+c$

$+d$),则四边形面积

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

(当 d 退化为一个点时,四边形变成了三角形,这便是海伦公式,因而这个公式对三角形也成立).





注意这里限制了四边形须内接于一圆(当然并非所有四边形都可内接于圆).人们陆续又给出其他一些公式,比如:

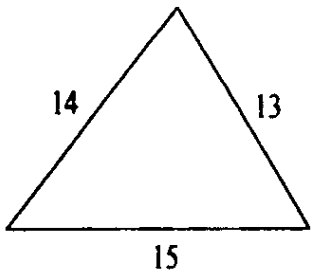
(1)若四边形一对内角和记为 2α 时,

$$S'=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha}.$$

(2)若四边形两对角线所夹锐角有一个为 45°时,

$$S=\frac{1}{4}|a^2-b^2+c^2-d^2|.$$

为了纪念海伦(他给出的面积公式极为有用),人们还把周长与面积皆为整数的非直角三角形称作"海伦三角形".



(对于直角三角形而言,周长与面积皆为整数者有无穷多个,比如边长为 3,4,5;5,12,13;等等,因为勾股数组有无穷多)

边长为 13,14,15 的三角形周长为 42,面积是 84,这是一个海伦三角形.

寻找海伦三角形起初十分困难,因为海伦三角形边长的一般公式直至不久前才有人给出.

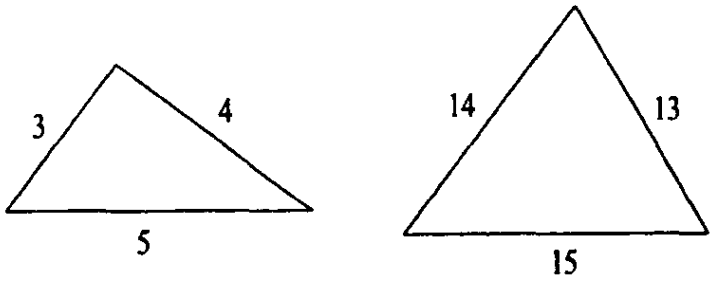
人们还发现:正三角形中不存在海伦三角形.

又相继自然数为边的海伦三角形(如 13,14,15 为边长者)

是否有无穷多个(包括直角三角形情形)? 回答是肯定的,这可由下面递推办法获得(若 a_k, b_k, c_k 为三角形三边长):

设 $a_1=3,\ b_1=4,\ c_1=5,\ s_1=6,$

及 $a_2=13,\ b_2=14,\ c_2=15,\ s_2=84,$



边长最小的两种海伦三角形

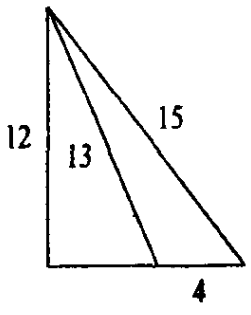
$$\text{则}\begin{cases} a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}+2, \\ b_n=4b_{n-1}-b_{n-2}, \\ c_n=4c_{n-1}-c_{n-2}-2, \end{cases} \qquad (n\geqslant 3)$$

为海伦三角形三边长,且

$$S_n=14S_{n-1}-S_{n-2}.$$

与海伦三角形有关的问题还有很多,比如:伊万斯(Evans, R.)1977 年提出下面问题:

在高与底边之比 d 为整数的整数边长的三角形中,d 只能为 3.



显然,这类三角形多为海伦三角形,$d\neq 1$,且 $d\neq 2$ 易证.

$d=3$ 的例子可如 $a=4, b=13, c=15$,a 边上的高 $h=12$.

$d>3$ 的情形,至今未获证.

又 1923 年迪克森(Dickson, L.E.)在其《数学史》中提出:

不存在有两条或两条以上中线长是有理数的海伦三角形.

该问题源于欧拉.他曾给出一个三角形,其三边长分别为

136,174 和 170.

它的三条中线长分别为 158,127 和 131.

但它的面积 $S=240\sqrt{2\ 002}$.

上世纪 70 年代巴克霍尔兹(Buchholz,R.H.)给出一个有两个中线为有理数的海伦三角形:

$$a=146,\quad b=102,\quad c=52,\quad s=1680.$$

它的三条中线长分别为 35,97 和 $4\sqrt{949}$.

尔后,拉思本(Rathbun,R.L.)也给出一个这样的三角形:

$$a=582,\ b=1252,\ c=1750,\ s=221760.$$

它的两条有理数长中线为 1144 和 433.

20 世纪 80 年代,盖伊(Guy,R.K.)将前述问题用余弦定理化成方程组(a,b,c 为三角形三边,m,n,t 为三条中线):

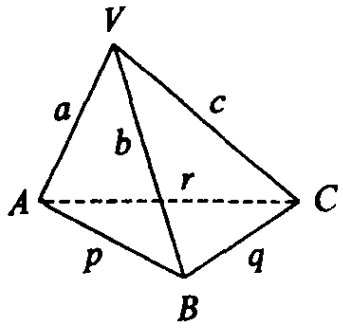
$$\begin{cases} a^2+4m^2=2b^2+2c^2, \\ b^2+4n^2=2c^2+2a^2, \\ c^2+4t^2=2a^2+2b^2, \\ a^4+b^4+c^4+16s^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2, \end{cases}$$

是有有正整数解问题,它至今尚未获解.

海伦公式推广到空间情形是由数学家欧拉首先考虑的,他给出了棱长分别为 a,b,c,p,q,r 的四面体体积公式:

$$V^2=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} p^2 & \dfrac{p^2+q^2-c^2}{2} & \dfrac{r^2+p^2-b^2}{2} \\ \dfrac{p^2+q^2-c^2}{2} & q^2 & \dfrac{q^2+r^2-a^2}{2} \\ \dfrac{q^2+r^2-a^2}{2} & \dfrac{r^2+p^2-b^2}{2} & r^2 \end{vmatrix}$$

当然他是从向量混合积概念推导而来,这儿不谈了.



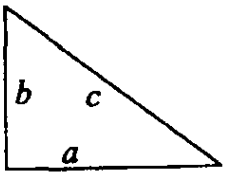
若记四面体为 $A_1—A_2A_3A_4$，且记 $D_{ij}=|A_iA_j|$，则有 V 的另外表达式

$$V^2=\frac{1}{288}\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&d_{12}^2&d_{13}^2&d_{14}^2\\1&d_{21}^2&0&d_{23}^2&d_{24}^2\\1&d_{31}^2&d_{32}^2&0&d_{34}^2\\1&d_{41}^2&d_{42}^2&d_{43}^2&0\end{vmatrix}$$

而海伦三角形的推广，请见后文.

2.完美长方体

1719 年哈克(Halcke)研究了毕达哥拉斯(Pythagoras)定理(勾股定理)及毕达哥拉斯三角形：

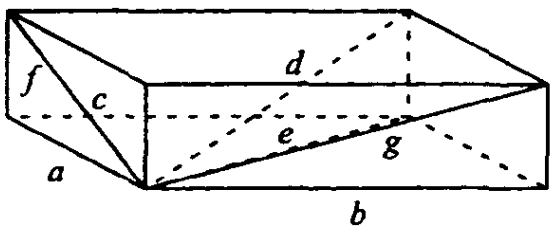


$$a=k(m^2-n^2),\quad b=2kmn,\quad c=k(m^2+n^2),$$

这里 $m>n$，又 $(m,n)=1$，且 k 为正整数，此时 (a,b,c) 又称为勾股数组.

他突然想到：这个概念可否推广到空间长方体中去？换言之：

有无三条棱及(长方体)对角线，甚至每个面上对角线皆为整数的长方体？



经过大量演算，他发现棱长分别为(44，117，240)的长方体中，(交汇在同一顶点的)三个面上对角线长

$$e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{44^2+117^2}=125,$$

$$f=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{44^2+240^2}=244,$$

$$g=\sqrt{117^2+240^2}=267.$$

遗憾的是长方体的对角线：

$$d=\sqrt{44^2+117^2+240^2}\approx 270.601\ 18$$

不是整数(只差一点点)．

(另一个类似的拟完美长方体的三条棱长分别为：1 008，1100 和 1155，三个面的对角线长分别为 1 492，1 533 和 1 595)

他一直在寻找，然而失望一直伴随着他．

大约 200 年后，1895 年布罗卡(Brocad)在长方体的棱互素条件下，证明满足上面假设的长方体(下称完美长方体)不存在．

此前，苏格兰数学家李奇(Leech，J.)做过不少研究．

时至今日，完美长方体人们仍未找到．

1984 年柯瑞克(Korec，I.)曾声称：

若完美长方体存在，它的最小棱长至少大于 10^6．

尔后，拉本(Rathbun，R.)借助计算机搜索认为完美长方体若存在其每条棱长皆大于 $3.3\ 375\times 10^8$．柯瑞斯(Korec)最近指出完美长方体的最大棱大于 10^9．

人们在寻找完美长方体未果之际，开始放松某些条件，试图找到“拟完美长方体”(如哈克找到的那样)，这常有下面几类：

(1)三条棱及长方体对角线长皆为整数者

这类问题两个世纪前日本人松永良弼已有研究，且在其所著《算法集成》中给出可以求得这种长方体的棱长公式：

对于正整数 l，m，若 l^2+m^2 的质因数分解式为 qn(这里 q

$>n$),则

$$a=q-n,\quad b=2l,\quad c=2m,\qquad (*)$$

即$(a,b,c)=(q-n,2l,2m)$时,长方体对角线

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=q+n.$$

比如(1,2,2)、(1,4,8)、(2,3,6)、…皆为所求.

不过(*)式不能给出全部解,对于上面所求得的(a,b,c)来讲,若它们满足:

$$\frac{a}{|x^2+y^2-z^2|}=\frac{b}{2xz}=\frac{c}{2yz}\left(=\frac{d}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

这里 $x^2+y^2\neq z^2$,且$(x,y,z)=1$,其中 x,y,z 是正整数.

(2)三条棱长、体对角线及一个面上对角线皆为整数

假设 $a_1,b_1,c_1(a_1>b_1)$为由上面(*)式得到一组整数,且设 $a_1^2+b_1^2+c_1^2=d_1^2$,

则 $a=a_1^2-b_1^2,\quad b=2a_1b_1,\quad c=2c_1d_1,\qquad (**)$

为满足上面要求的长方体的三条棱长.

注意到此时 $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=a_1^2+b_1^2$,

且棱长 a,b 面上对角线 $e=\sqrt{a^2+b^2}=a_1^2+b_1^2$.

(3)三条棱长、三个面上对角线长及长方体对角线七个元素中有六个是整数

这类问题有三种情况:

①体对角线不是整数

这类长方体哈克已于 1719 年发现过,此外下面一些棱长的长方体也属此类:

(44, 117, 240), (85, 132, 720), (140, 480, 693),

(160,231,792), (187,1020,1584), (195, 748, 6336),

(240,252,275), (429, 880, 2340), (495,4888,8160),

(528,5 796,6 325),……

其实,波兰数学家谢尔平斯基(Sierpinski,W.)在其所著《毕达哥拉斯三角形》中给出一个公式:

若(x,y,z)为一组勾股数$(x^2+y^2=z^2)$,则

$$a=x|4y^2-z^2|,\quad b=y|4x^2-z^2|,\quad c=4xyz,$$

是满足题设的长方体三条棱.它有无穷多组解,但不能给出全部解,如(85,132,720)不能由此公式得到.

②一个面上对角线长不是整数

这个问题数学家欧拉(Euler,L.)曾研究过,他曾给出:

(a,b,c)	体对角线 d	三个面上对角线长
(104,153,672)	697	185, 680, $\sqrt{474\,993}$
(117,520,756)	925	533, 765, $\sqrt{841\,936}$

李奇曾仿照①的办法给出产生这类长方体棱长的公式

③一条棱长不是整数

比如三条棱长分别是124、957和$\sqrt{138\,528\,00}$,此时:

三个面上对角线长分别是965、3724和3843,且长方体对角线长为3845.

这种长方体的棱长公式也可仿①给出.

3.完美矩形

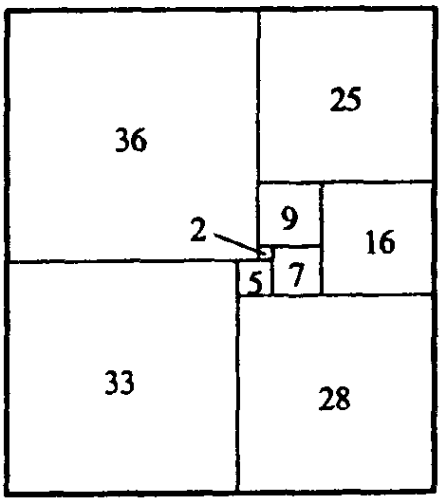
1936年,正在英国剑桥大学读书的四位学子:斯通(Stone,C.A.B.)、布鲁克斯(Brooks,R.L.)、史密斯(Smith,R.L.)和塔特(Tutte,W.T.)(如今他们都是当代知名的研究组合论方面的数学家)聚在一起闲聊,其中一位问道:

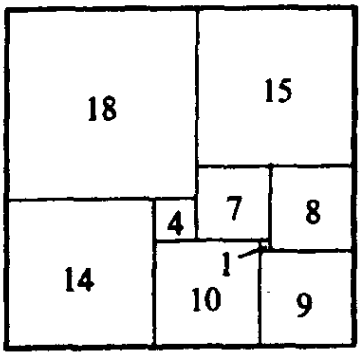
“能否把一个正方形剖分成尺寸(规格)完全不同的小正方

形?”

问题提出后,包括当时世界上知名的数学家、前苏联学者鲁金(Пуъин,Н.Н.)都参与了讨论,他的结论是不会存在这种图形.

四年之后,布鲁克斯率先给出了可剖分成9个不同规格正方块的矩形(今称9阶完美矩形,此前有人亦发现了此类矩形,只不过剖分成的小正方形块数较多),图中数字表示该正方形边长(下同):

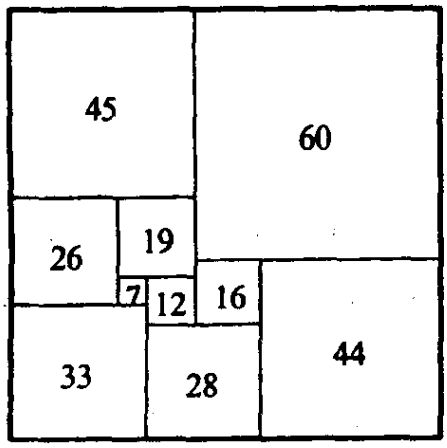


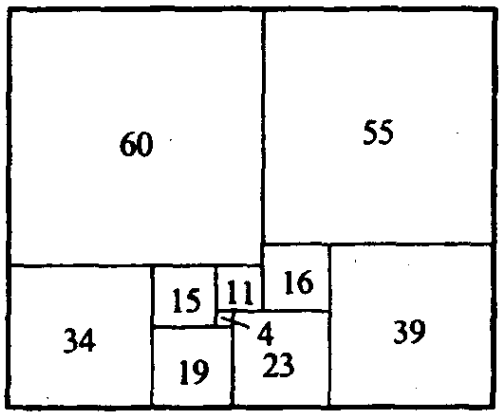


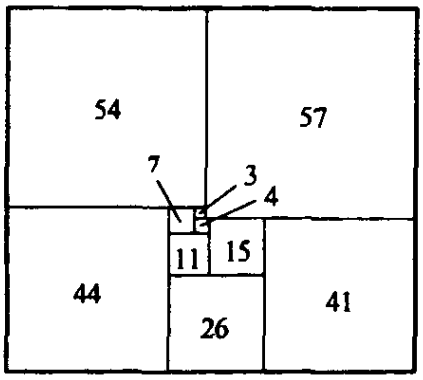
他同时指出,9阶(阶系指剖分成的小正方块个数)完美矩形(本质上)只有上述两种.

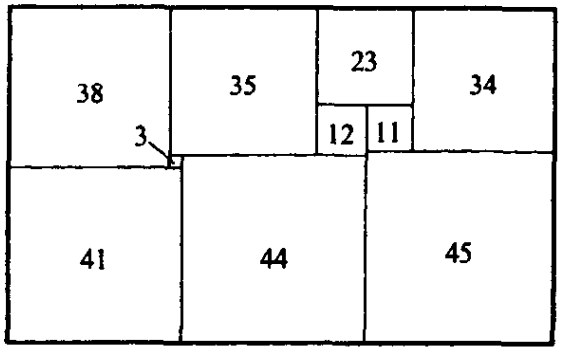
此后布鲁克斯给出了全部9~11阶完美矩形.并且指出:

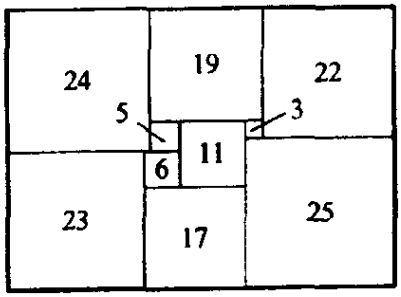
10阶完美矩形(本质上)只有6种,见下诸图形.

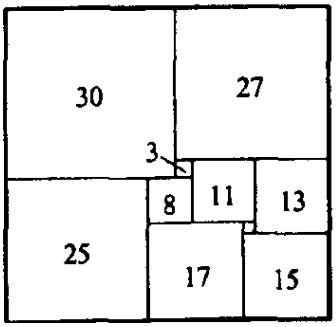




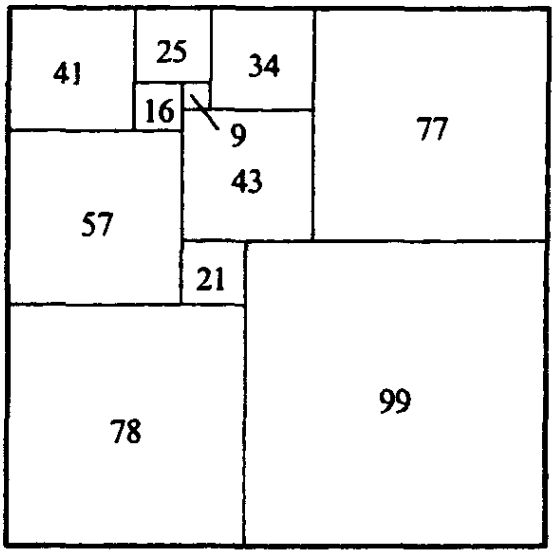


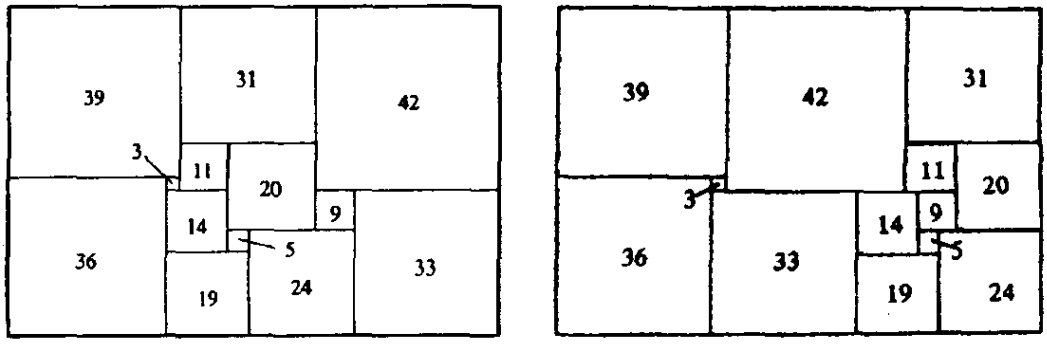




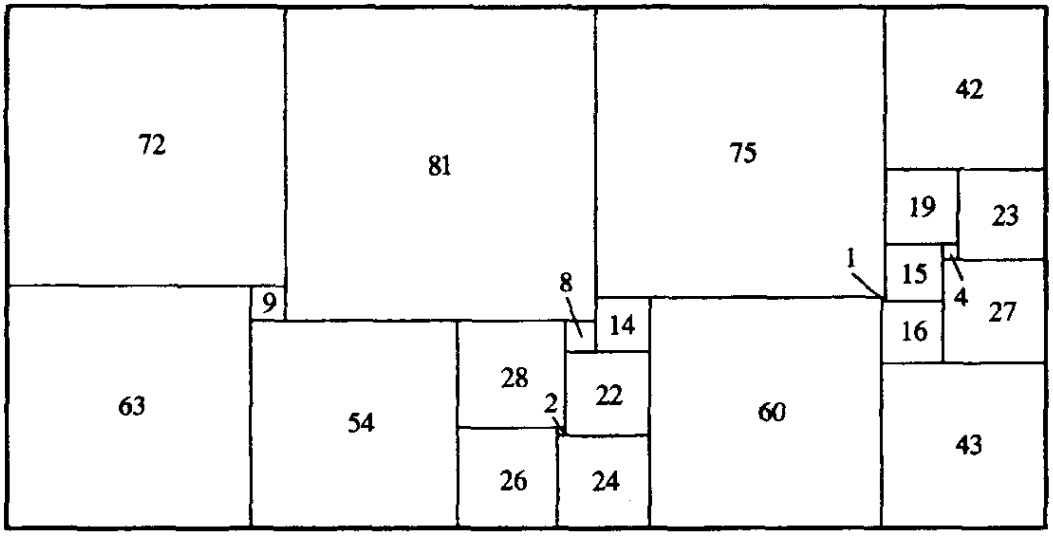


此外，他还找到一个 11 阶完美矩形，其边长为 177 × 176（下图），该矩形几乎接近正方形，然而却不是正方形.





13 阶完美矩形(本质上仅此两种)



费德瑞克(Federico,P.J.)发现的长宽之比为 1:2 的完美矩形

4.完美正方形

把一个大正方形分成若干个小正方形,有时是很容易办到的事.如图 1,可将正方形“一分为四”.如再将其中一个小正方形“一分为四”,如图 2,就可分成 7 个小正方形.图 3、图 4 分别将一个大正方形分成 6,8 个小正方形.换言之,正方形可剖分成 6,7,8 个小正方形.如再将其中一个小正方形“一分为四”,那么,正方形可剖分成 9,10,11 个小正方形.如果再将其中一个小

正方形“一分为四”，又可得到 12，13，14 个小正方形，这样可以一直分下去……

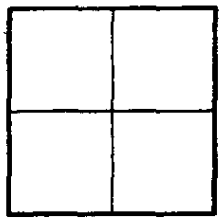


图 1

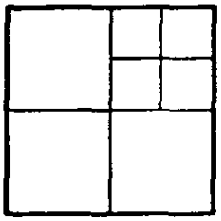


图 2

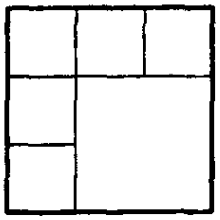


图 3

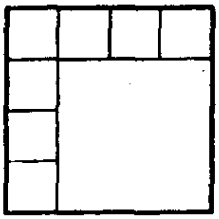


图 4

现在要求把一个大正方形分成若干个小正方形，但每一个小正方形大小都不相等，这个要求就不容易做到了．数学上把这种正方形叫做“完美正方形”．

完美正方形能否找到呢？起初人们找了好久都没有找到，以为这种图形不存在．但是，经过努力，人们找到一些接近“完美正方形”的矩形．其中之一是 69×61 的矩形，另一个是 33×32 的矩形．它们分成 9 个规格不同的正方形（图 5、图 6）．图中小正方形中所标的数字为该正方形的边长．

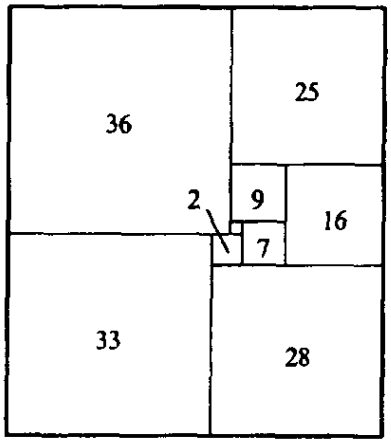


图 5

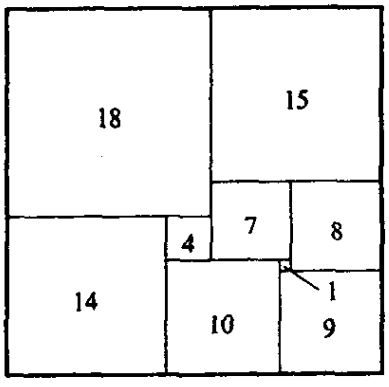
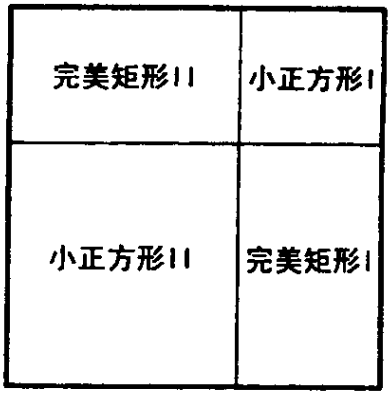


图 6

完美矩形的发现，使人们对完美正方形的存在增加了信心．

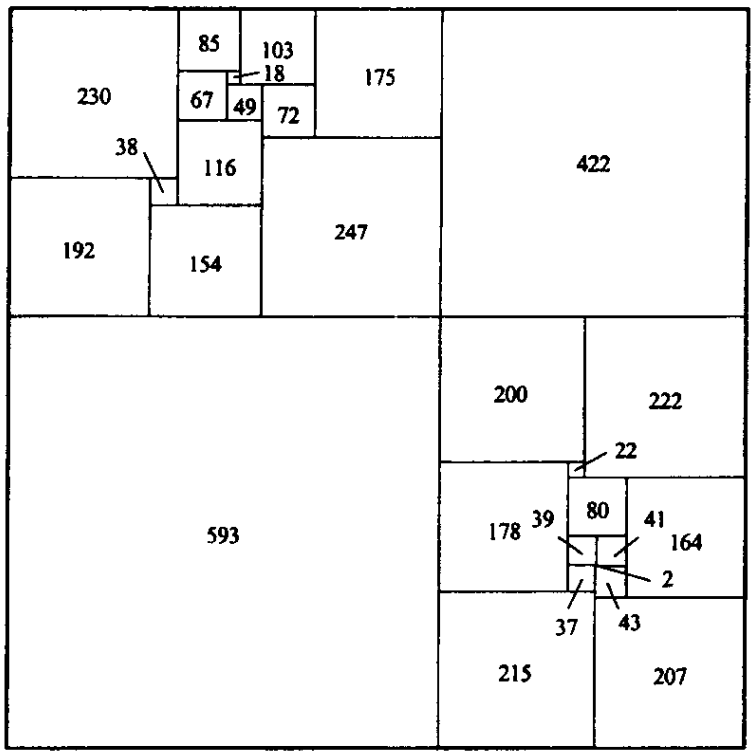
莫伦（Moron，Z．）首先提出下面的由完美矩形构造完美正方形的设想：

如果同一个矩形有两种不同的正方形剖分形式，且其中的所有小正方形规格均不相同，那么在这两个剖分的基础上再添加两个小正方形便可得到一个大的完美正方形(见右图).



1939 年前后莫伦真的构造出一个 55 阶的完美正方形.

几个月后，前文提到的斯通等四位剑桥大学的高足用上述方法构造出一个 28 阶的完美正方形(显然，小正方块数目越少，图形越难构造)，见下图.



28 阶完美正方形

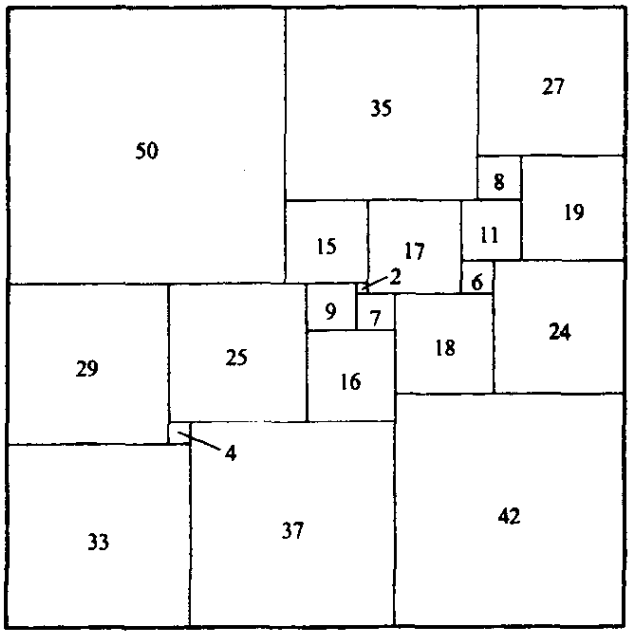
1948 年威尔考科斯(Wilcocks, T. H.)找到了 24 阶的完美正方形.

1967 年威尔逊(Wilson, J. C.)又先后给出了 25、26 阶的完美正方形.

尽管早在1962年有人已经证明“不存在20阶以下的完美正方形”,但直到1978年为止,阶数最小的完美正方形仍是24阶的.

1978年荷兰特温特技术大学的杜伊维斯廷(Duijvestijn, A. J.W.)借助于电子计算机的帮助,给出了一个21阶的完美正方形(见下图),同时他宣称:低于21阶的完美正方形不存在.

至此完美正方形问题的讨论告一段落.



21阶完美正方形

顺便讲一句:完美正方形问题还与电学中关于电流、电阻等关系的基尔霍夫(Kirchhoff, G.R.)定律有联系,不少完美图形的发现是借助于该定律完成的.

起初找到的正方形还不十分完美,它们分成许多大小不同的小正方形后,还剩下一些部分.如图a、图b、图c、图d,其中涂黑的部分就是剩下的,这些剩下的部分虽然不多,如图a,剩下的部分面积为40×1.

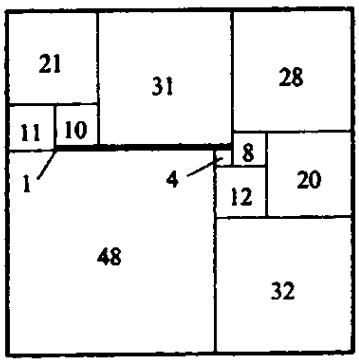


图 a

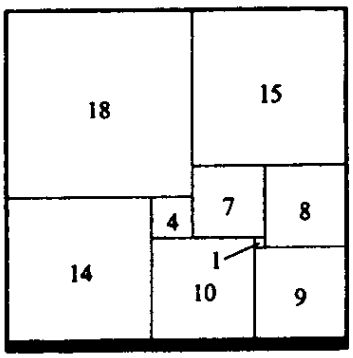


图 b

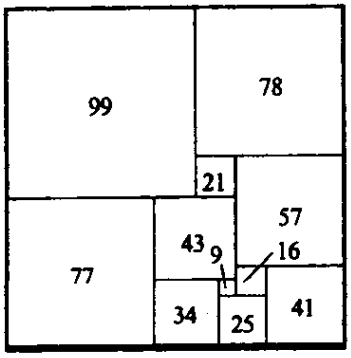


图 c

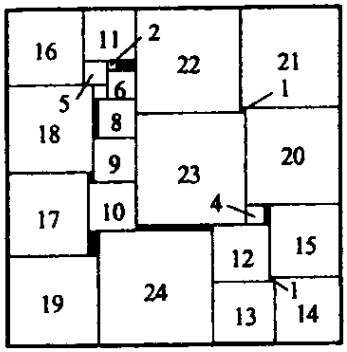


图 d

人们继续努力，到 1939 年，终于发现了第一个完美的正方形，它由 63 个大小不同的小正方形（下称阶）组成．接着，又找到了 39、26（图 e）、25（图 f）、24（图 g）阶的完美正方形．其中有些是用电子计算机帮忙找到的．

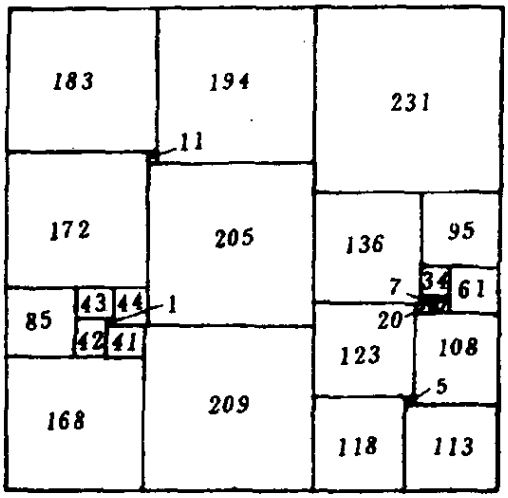


图 e　26 阶完美正方形

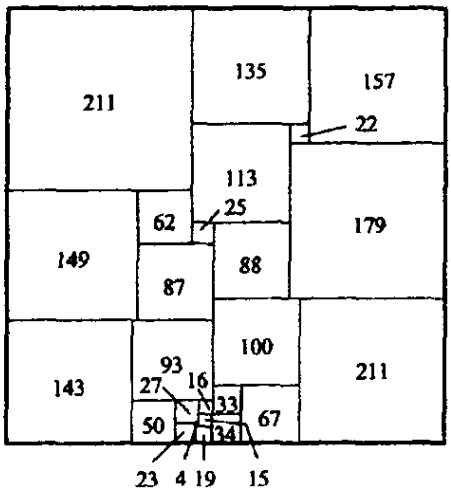


图 f　25 阶完美正方形

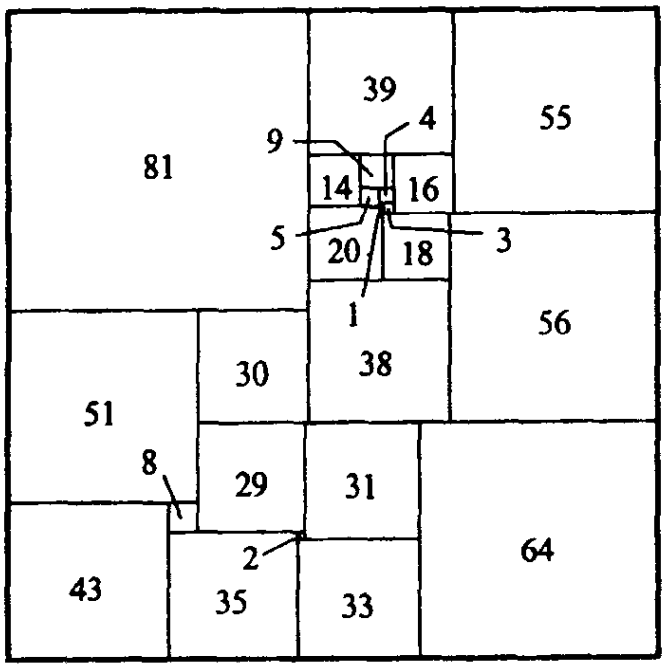


图 g　24 阶完美正方形

前文已述,完美正方形阶数不能少于 21.

我们还想讲一下正方形的另一类不完美剖分——简单剖分:

对于 $n \times n$ 正方形将其剖分成边长为整数且彼此互素的小方块,且允许有重复.

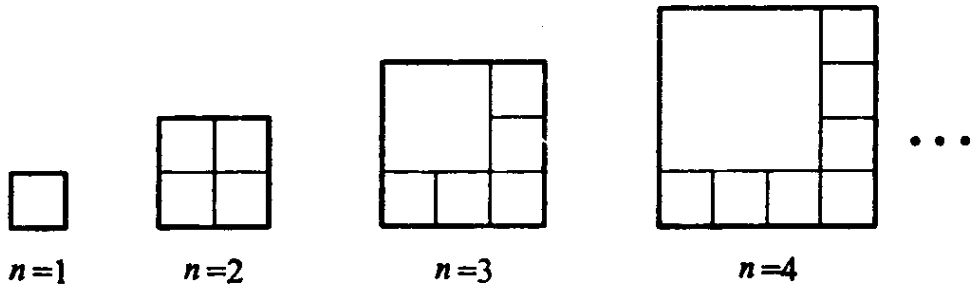
设 $s(n)$是边长为 n 的正方形非平凡简单剖分(即除去正方形自身外的部分)的小正方块的最少个数.

对于这种剖分,人们已经知道下面一些结果($n \leqslant 100$ 时):

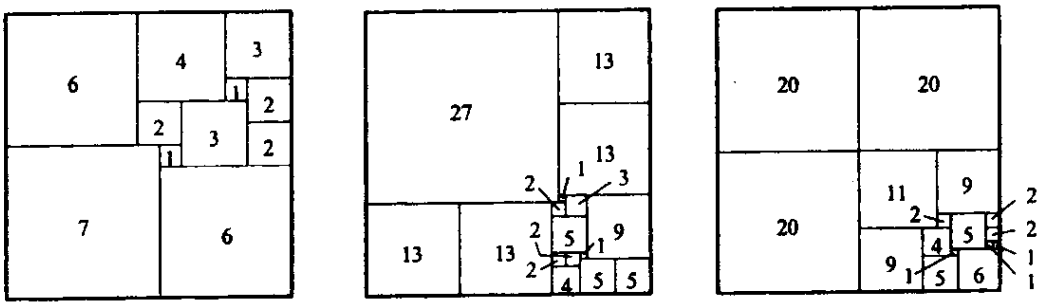
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ~ 13	14 ~ 17
$s(n)$	1	4	6	7	8	9	9	10	10	11	12

18 ~ 23	24 ~ 29	30 ~ 39	40	41	42 ~ 50	51 ~ 66	67
13	14	15	16	15	16	17	18

68	69	70	71 ~ 87	88 ~ 100
17	18	17	18	19



$n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$



$n=11$ $n=40$ 的两种剖分

对于不少 n 值,人们尚不知 $s(n)$为多少,20 世纪 60 年代曾有人给 $s(n)$的一个估计:

$$\log_2 n < s(n) < 6\log_2 n,$$

这是一个比较粗的估计式.

另外,人们还研究了所谓混完美正方形(即完美正方形中含有至少一个完美矩形者)问题.1982 年杜伊维斯廷给出一些阶数的混完美正方形个数 $\tilde{s}(n)$:

n	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$\tilde{s}(n)$	1	2	13	26	60	151	208	361	541	848

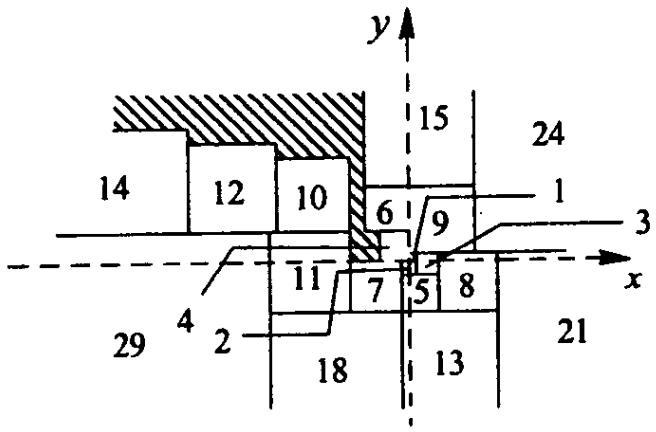
人们在研究完美正方形的同时,又提出下面的问题:

用边长分别为 1,2,3,…的正方形能否铺满(覆盖)整个平面?

这亦是一个至今尚未解决的问题[3].

但是,人们借助于斐波那契(Fibonnacci,L.)数列(满足 $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$,这里 $n\geqslant 2$ 的数列 $\{f_n\}$)的性质证明了:

用边长分别为 1,2,3,…的正方形,至少可以覆盖整个平面的四分之三.



从上图可以看到:在以虚线为轴的坐标系中,将平面分为四部分(即四个象限).

用斐波那契数列:(1),2,3,5,8,…(这里括号中的数字表示暂未用上者,下同)为边的正方形恰好可铺满坐标平面第四象

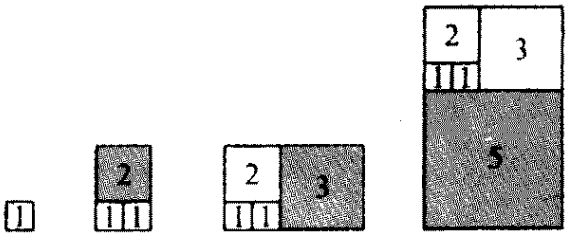
限；

用广义斐波那契数列(鲁卡斯数列)：(3)，(6)，9，15，24，…为边长的正方形可以铺满坐标平面第一象限；

用广义斐波那契数列：7，11，18，29，…为边长的正方形可以铺满坐标平面第三象限；

还有未在上述三个数列中出现的 4，6，10，12，14，…等为边的正方形均放在第二象限.

从图中亦可看到：以 1，2，3，…为边长的正方形至少可覆盖整个平面的 3/4.



其实按照下图办法，注意每次增加一个小正方形(阴影部分)，其边长为$\{f_n\}$的下一项：如此边长为 1，1，2，3，5，…的正方形，可以证明该数列为边长的正方形可以覆盖整个平面.

关于立方体剖分问题*，人们已证明：

完美立方体不存在(把正方体剖分成规格各不相同的立方体称为完美立方体).

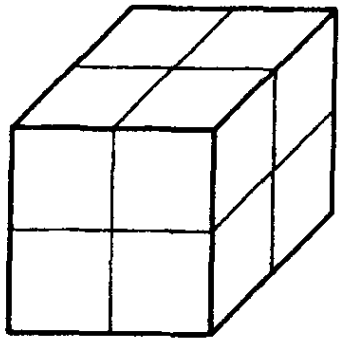
至于不完美剖分，人们已有结论：

可将正方体剖分成 $n > 47$ 的任何整数个小立方块(此外 $n = 1,8,15,20,22,27,29,34,36,38,39,41,43,45,46$ 亦然)，

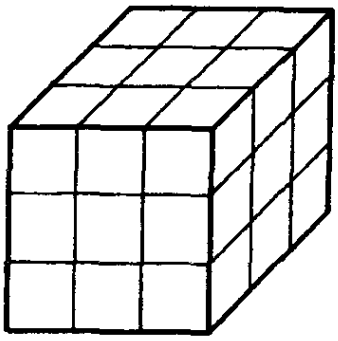
一个立方体显然可分成 8 或 27 个小立方体，

---

* 资料取自单墫教授的“正方体的分解”一文(载《科学》1998 年 6 期)，文字有改动.



$n=8$



$n=27$

又若正方体可剖分成 n 个正方块，则它亦可分成 $n+7$ 或 $n+26$ 个小正方块.

这样正方体可剖分成 15,22,29,36,43,50,…和 34,41,48,…个小正方块.

1946 年斯柯特(Scott, W.)证明：$n=1,8,15,20,22,27,29,34,36,38,39,41,43,45,46,48,49,50,51,52,53$ 及大于 54 时，正方体可剖分成 n 个小正方块.

1969 年，契尔(Thiel, Von. C.)发现 $n=54$ 时正方体亦可剖分，这样便有前面的结论(注意到 48～54 为七个连续自然数).

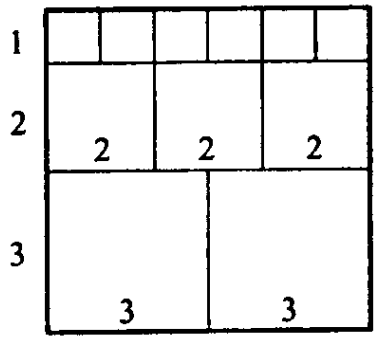
具体地讲：首先，$20=3^3-2^3+1$. 这就是说，如果将正方体分成 27 个小正方体，再将其中 8 个(比如在左上方的 8 个)并做 1 个，那么正方体就分成了 20 个小正方体. 于是，如果一个正方体可以分解成 n 个正方体，那么它也可以分解成 $n+19$ 个正方体.

同样，$38=4^3-3^3+1$. 于是，一个正方体可以分解成 38 个正方体，而且根据上面所说，也可以分解成 45,52,…个正方体.

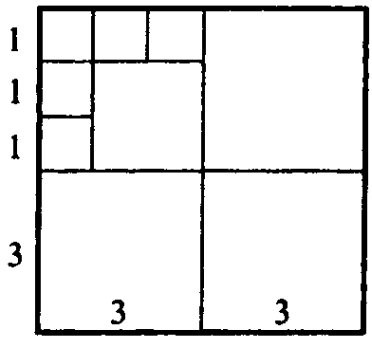
又因为 $27=20+7$，$39=20+19$，$46=20+26$，$53=34+19$，所以正方体可以分解为 27,39,46,53 个正方体.

由于 $49=6^3-4\times(3^3-1)-9\times(2^3-1)$，这表明先将正方体

分解成6^3个边长为原正方体 1/6 的正方体，再将正前面的 4×3^3 个正方体合成 4 个正方体，中间 9×2^3 个正方体合成 9 个正方体，就可以得出 49 个正方体.



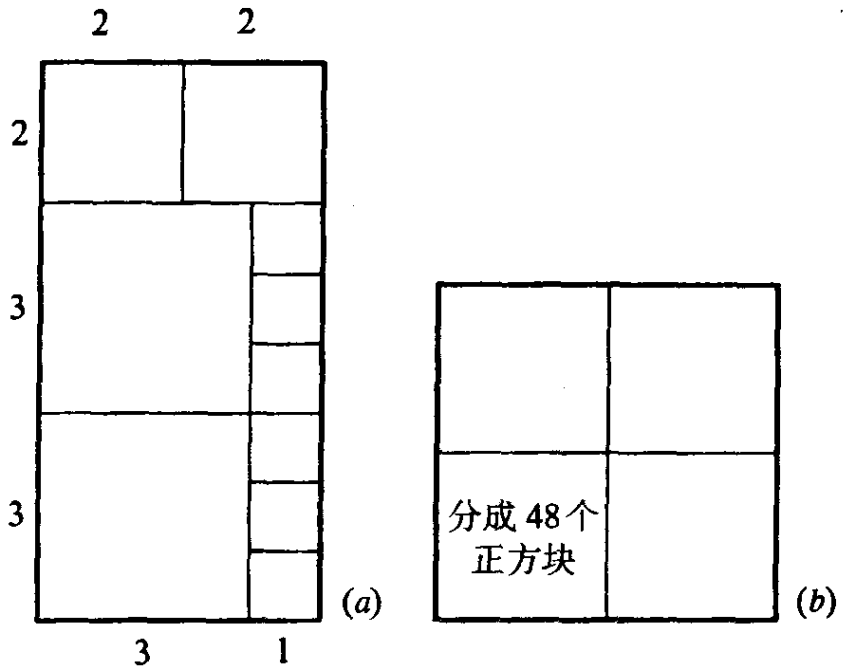
分解成 49 个小正方块的俯视图.设正方体棱长为 6，边长为 1、2、3 的小正方块个数分别为 6^2，3^2，2^2，这样共有 $36+9+4=49$ 个小正方块.



分解成 51 个小正方块的上层俯视图(下层的俯视图仍为图 2).其中边长为 3 的正方块有 5 个，边长为 2 的正方块有 5 个(下层 3 个，上层 1 个，还有 1 个在两层之间).至于边长为 1 的正方块，由图可知一共有 $6\times2+5\times4+9=41$ 个.

同样，等式 $51=6^3-5\times(3^3-1)-5\times(2^3-1)$ 表明正方体可以分解为 51 个正方体.做法仍是先将正方体分解为 6^3 个正方体，再适当合并.假定原正方体边长为 6，其中边长为 3 的正方体有 5 个，边长为 2 的正方体有 5 个(下层 3 个，上层 1 个，还有 1 个在两层之间).

为了将正方体分成 54 个小正方体，首先将底面为正方形、高为底面边长 2 倍的长方体(实际上就是两个相同的正方体垒在一起)分成 48 个正方体.不妨设底面边长是 4 个单位.从正前面看去(主视图)，有 2 个边长为 3 的正方体.最上面是 4 个边长为 2 的正方体，其余都是边长为 1 的正方体，共有 $2\times4^3-2\times(3^3-1)-4\times(2^3-1)=48$ 个正方体.



分解成54个正方块的示意图.如图 a,先将两个边长为4的正方体叠在一起,将其分解为48个小正方块,其中边长为1,2,3的正方块分别有42,4,2个.如图 b,假定一个正方体边长为8,先将其分成8个边长为4的正方体,再选择两个叠在一起的正方块,按照图 a 的方法分成48个小正方块.这样就完成了分解成 $6+48=54$ 个正方块的工作.

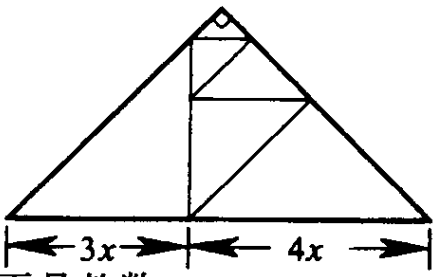
一个正方体,假定它的边长为8,可以分成8个边长为4的正方体.其中6个保持不动,而将左前方的两个垒在一起的正方体,作为一个上面所说的 $4\times4\times8$ 的长方体,分成48个正方体.这样原正方体便分成了 $48+6=54$ 个正方体.或许这就是蒂尔的分解方法.

5.完美三角形

人们曾考虑过这样的问题:能否把一个大正三角形分成许多大小不同的小正三角形,很可惜,早在1948年,数学家证明这

种完美的正三角形是不存在的.

但是对等腰直角三角形来讲,这种完美剖分是存在的(见右图):



但它的边长不再是整数.

有人绘出过一个 11 阶完美三角形(见右图),只是验算工作尚待进行.

不过,人们还不甘心,要找到一种近似完美的正三角形.即分出的小正三角形允许有相同的,但相同的要尽量地少.这种正三角形叫“拟完美正三角形”.

人们终于发现了一种可以分成 4 种大小不同的小正三角形的分法,并且得出结论:这种正三角形最少要分成 11 份.下面是 2 种分法(图 1、2).

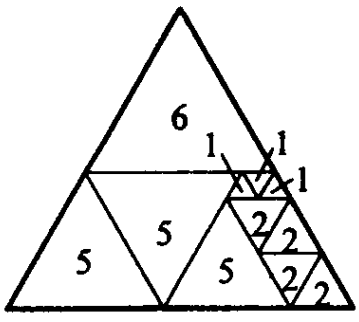


图 1

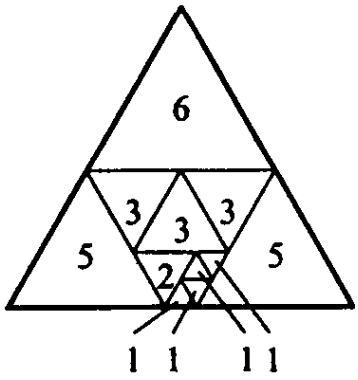


图 2

除了将大正三角形分成小正三角形外，人们还研究将大任意三角形分成小的相似三角形.得出的结论是可以分成个数不少于4的任意个小相似三角形.这里我们画出分成4,6,7,8个小三角形的图形(图3、图4、图5、图6).

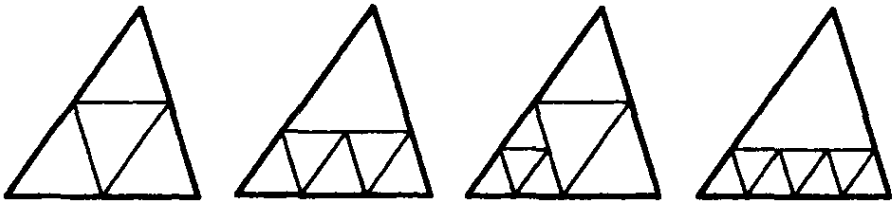


图3　　图4　　图5　　图6

一个正三角形还可以在其中分出许多个等腰三角形来.不过,最少要分成3个.这里画出分成3个和4个等腰三角形的图.(图7、图8).

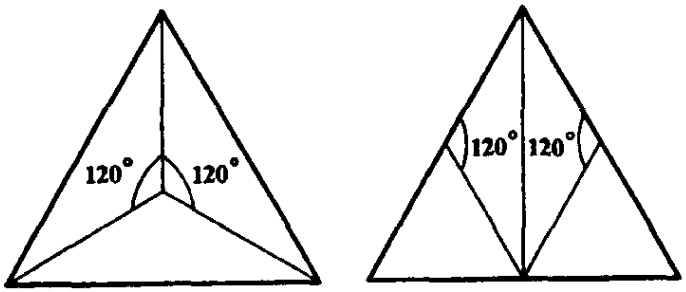


图7　　图8

对将任一个大三角形分成小三角形问题,人们还找到了两条规律:

大锐角三角形可以分成5个以上的小锐角三角形;

大钝角三角形可以分成6个以上的小锐角三角形.

怎么分法,读者自己先试试.大家只要注意到下面2个结论就会明白:一个钝角三角形总可以分成一个小钝角三角形和一个小锐角三角形(图9);一个钝角三角形总可以分成7个小锐角三角形(图10).

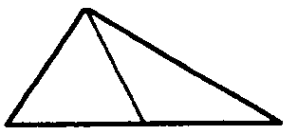


图 9

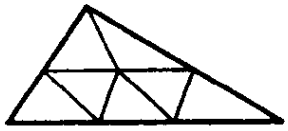


图 10

最后,我们来谈谈将正方形分成三角形的问题.

有人提出:边长为整数的正方形,可否分割成若干边长全是整数的直角三角形呢?

1966 年,人们找到了边长为 39780 的正方形被割分成 12 个边长皆为整数的直角三角形的例子.

1981 年,有人指出:边长在 1000 以内的正方形,割分成 10 个以下的整数边长的直角三角形的方法有 20 种.

1968 年,一位日本人将边长为 6120 的正方形割分成 5 个整数边长的直角三角形,创下了这种分割个数最少的记录.后来,他又将正方形边长缩小至 1248(图 11).

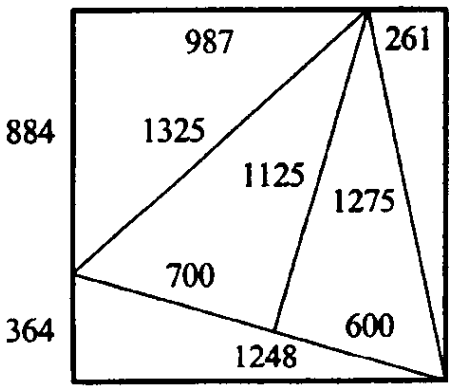


图 11

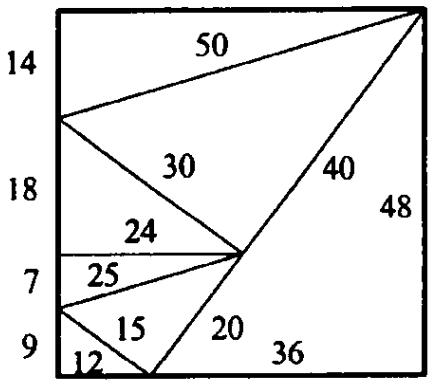


图 12

1976 年有人将边长为 48 的正方形割成七个整数边长的直角三角形,从而创下这种割分边长最小的记录(图 12).

这儿的三角形形状是各异的,若允许它们有相同的结论将是另一番情景:

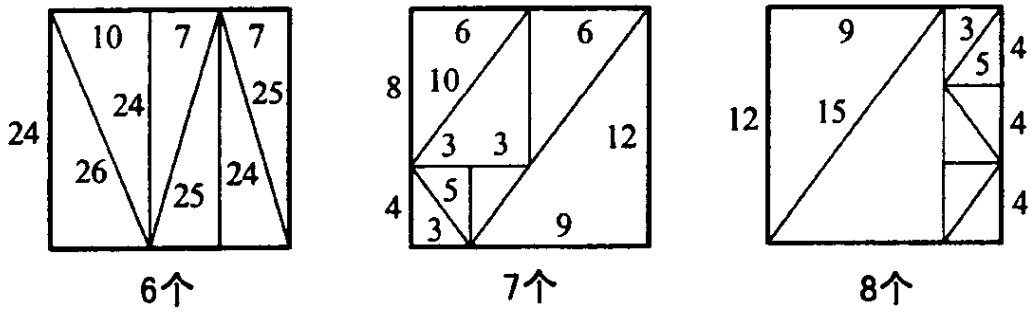


图 13

正方形分成锐角三角形的问题结论是:一个正方形可以分成 7 个以上的锐角三角形.

下图展示的是分成 8,9,10,11,12 个锐角三角形的情形(图 14).由于每个锐角三角形皆可割分成 6 个小锐角三角形,在上述割分的基础上再分,就可分成 13 个以上锐角三角形了.

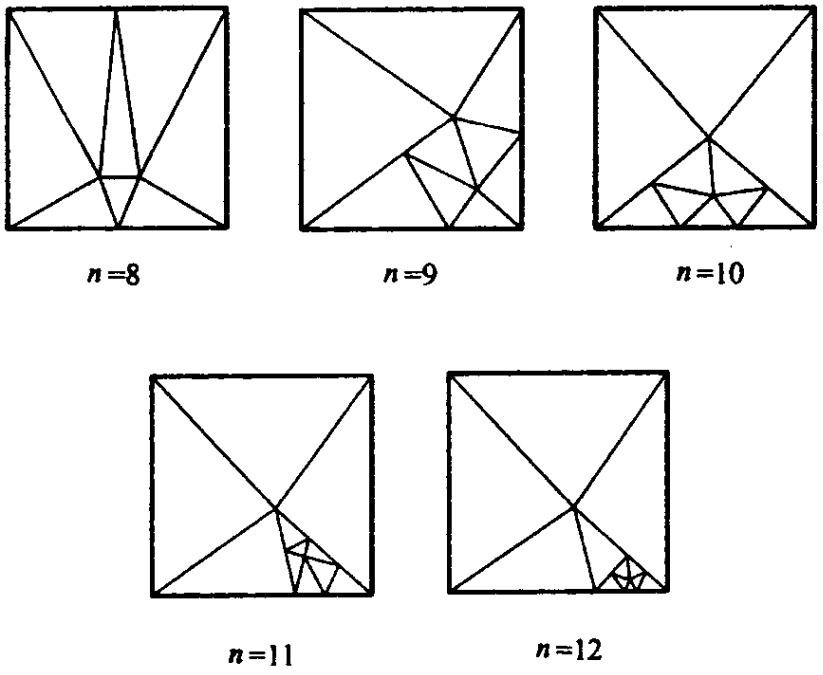
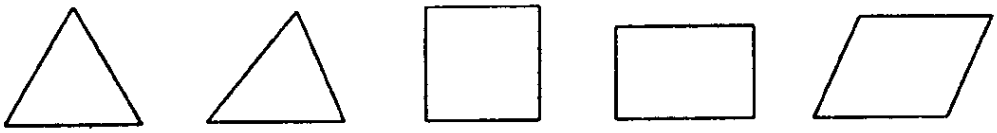


图 14

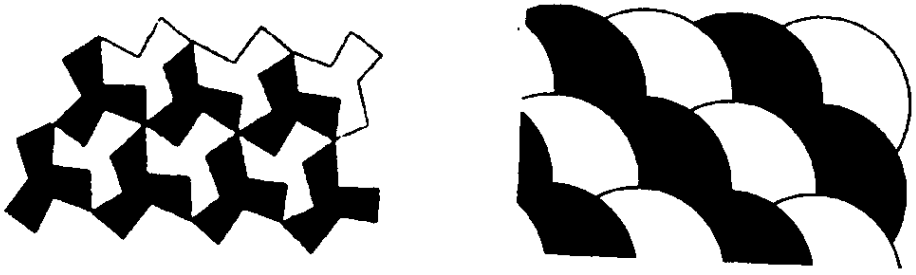
6.铺地问题

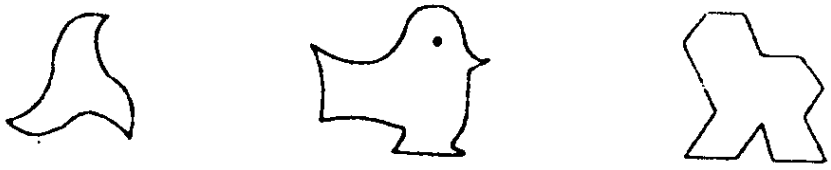
方砖铺地是市政建设、家居装修常会遇到的事，这其中也有不少数学问题.比如什么形状的瓷砖能铺满地(平)面？如果平面想象得很大很大，可铺满平面的图形很多，比如下面的诸形状的瓷砖：



正三角形　一般三角形　正方形　长方形　平行四边形

甚至有些看上去很不规范的图形瓷砖也能铺满平面：

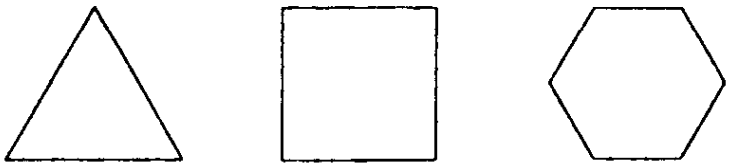




不信的话，你可以按照上面图形之一剪一些同规格的纸片，然后拼试拼试、摆摆看看，结论自然会有.

对于正多边形(各边长相等、各内角也相等的多边形)的情形，你也许会以为可以铺满平面的种类很多，其实不然，在正多边形中，仅有三种可以铺满平面(再强调一遍，无重叠、无缝隙).

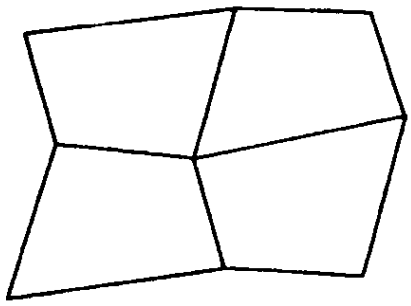
这个问题用高中数学知识就可以证明.



正三角形　　正方形　　正六边形

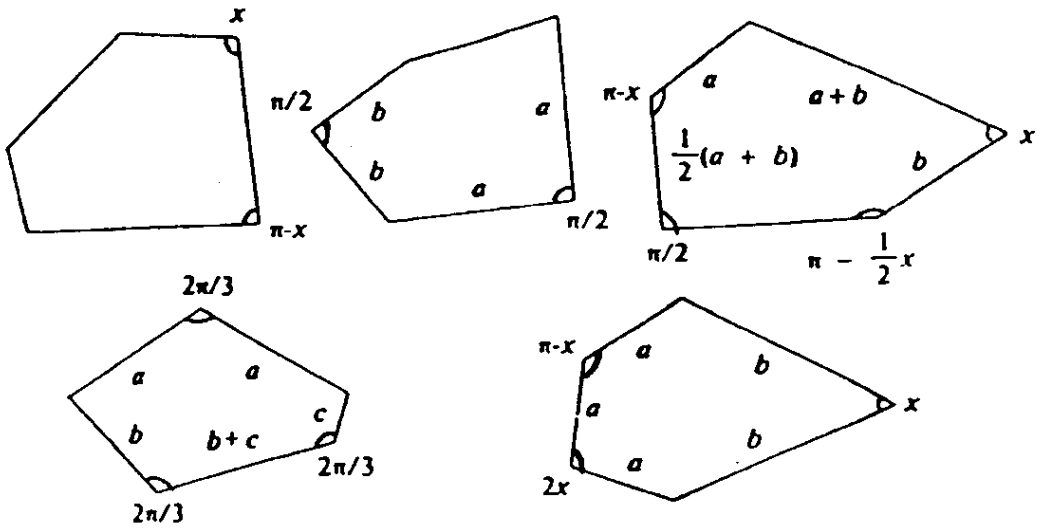
美国数学家马丁·加德纳(Cardner, M.)首先意识到任意四边形皆可铺满平面,但为何任意五边形却不都能铺满平面?

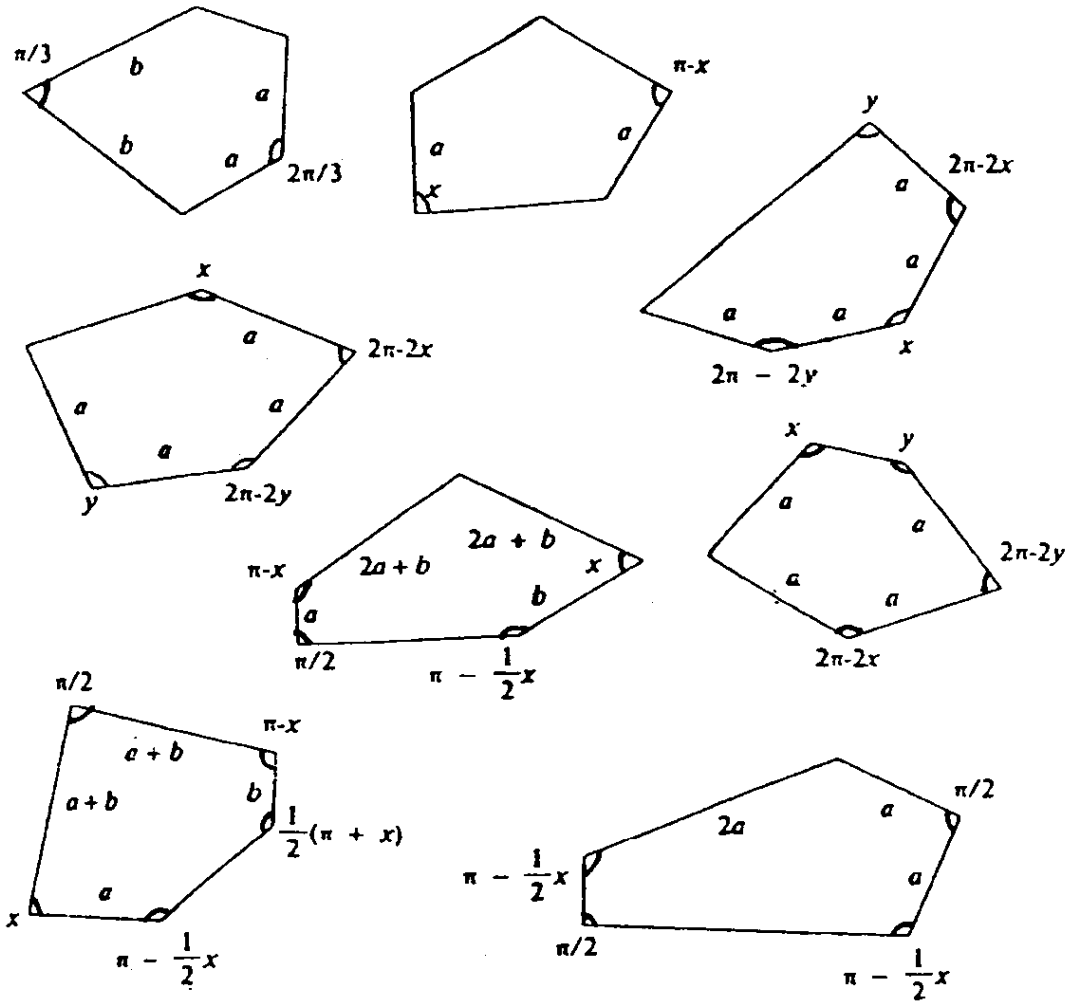
经他潜心研究发现某些五边形可以铺满平面,为此他在《科学美国人》杂志上撰文叙述了该问题,并介绍了他的一些发现.



任意四边形可铺满平面

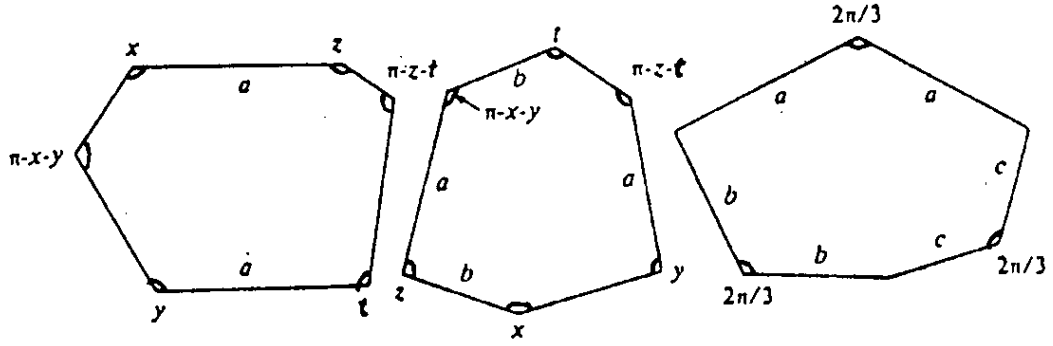
此问题很快被许多数学家关注,美国人沙特斯奈德(Schattschheider, D.)给出了 13 种可以铺满平面的五边形,这也是迄今为止人们的全部发现(新近人们又找到一种,从而使这种五边形个数增到 14),见下面诸图形.





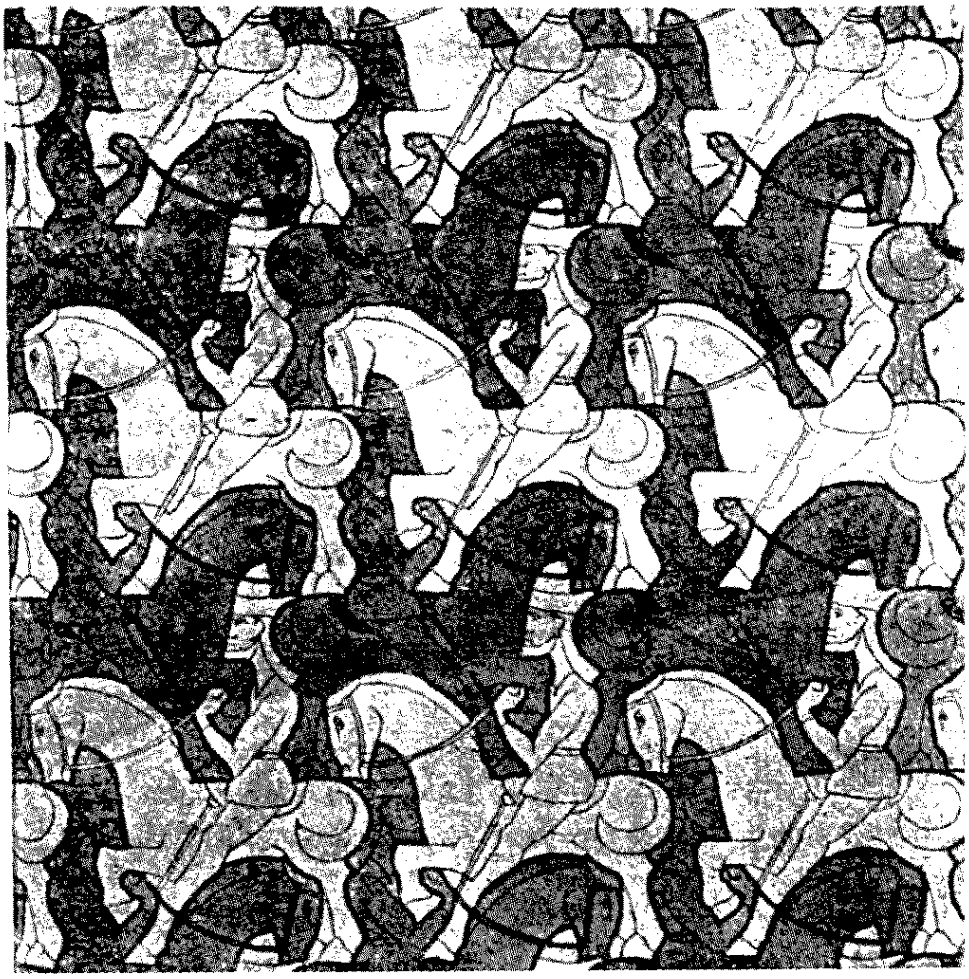
此图取自沙特斯奈德的论文(见《数学杂志》51卷)

顺便讲一句:对任意六边形,人们仅找到三种可以铺满平面的不规则形状.



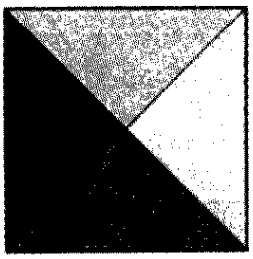
可以通过单块重复来铺砌平面的三类六边形,这些类型于1918年为莱因哈脱(Reinhardt,k.)所发现.

$n \geqslant 7$ 时，不存在可铺满平面的凸 n 边形（这一点不难证明）.但有趣的某些非规则几何图形却可铺满平面.



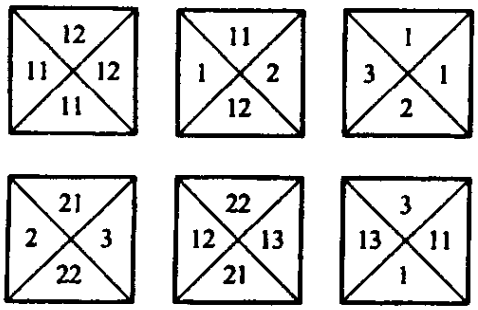
可以铺满平面的黑白武士图案（埃舍尔绘）

美籍华裔数理逻辑家王浩被下面的花砖铺地问题所吸引：

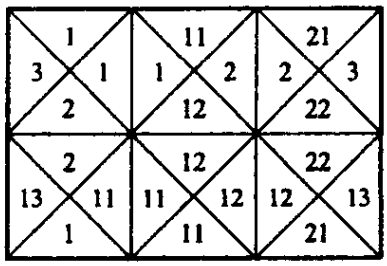


一种方砖，每块涂有四种不同花纹（右图），人们依据这些涂色，以巧妙安排而达到某些艺术效果.

一个有趣的现象是，下面的涂着不同花纹的六种瓷砖（图中不同数字代表不同花纹），在铺设时，要求两瓷砖相接处的颜色（花纹）一样是可以办到的：

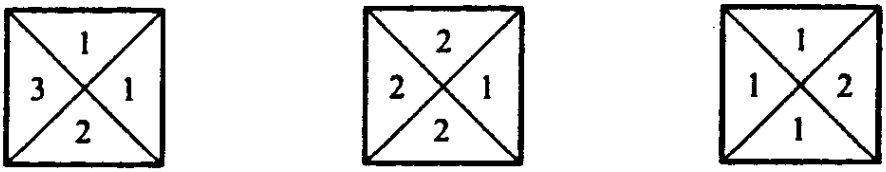


六种瓷砖



铺成矩形

上面左图给出了六种涂着不同图案的瓷砖，右图给出用它们可以按要求拼成一个矩形的情形——由此可知：因为用此矩形可以铺满整个平面，所以用上述六种瓷砖铺满平面也是办得到的.



但是你也许不曾想到：使用上面三种图案的瓷砖，却无法依照前述要求(即相邻两瓷砖相接处花纹一样)铺满平面：不信的话，你可以动手试试.

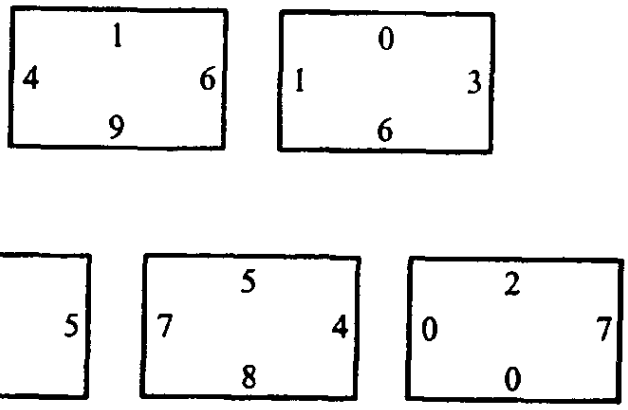
王浩教授对此开始不解，尔后他深入研究，不仅找到了问题的根蒂，同时还证明了下面的事实(乍看上去也许平淡无奇，其实结论却蕴含了极深刻的数学内涵)；

瓷砖只要能铺满坐标平面的第一象限，就能铺满整个平面.

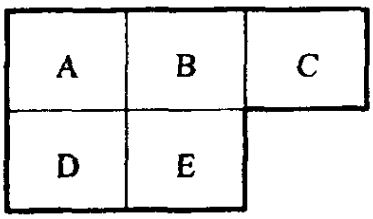
同时他还发现：如果允许瓷砖翻转(瓷砖两面涂色的话)，按前面要求的上述铺地问题却可以办到.

下面是 1998 年美国高中数学考试的一道试题：

五种同规格矩形纸片边上分别标有十个阿拉伯数码之一：



将它们按下图摆放时要求相邻两纸片边上数码相同.请问:这些纸片是如何放置的?



答案并不难,你稍稍用心便可找到.

7.植树问题

数学、物理学家牛顿(Newton,I.)是一位沉迷于科学研究的人,他在科学的诸多领域均有划时代的贡献,他每天伏案工作十几个小时,然而在艰深的研究之余,也常阅读和撰写一些较轻松的东西作为休息.比如,他曾经很喜欢下面一类题目(1821年杰克逊(Jackson,J.)在《冬天傍晚的推理娱乐》的书中也给出了这个名题):

9棵树栽9行,每行栽3棵,如何栽?

乍看此题似乎无解,其实不然,看了图1(图中黑点表示树

的位置,下同),你也许会恍然大悟.

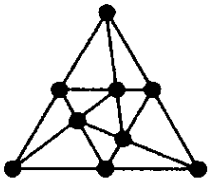


图 1

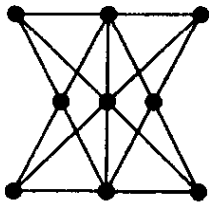


图 2

牛顿还发现:9 棵树每行栽 3 棵,可栽行数的最大值不是 9,而是 10,见图 2.图 3 给出 10 棵树栽 10 行每行 3 棵的栽法.

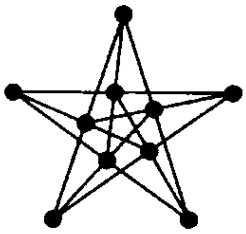


图 3

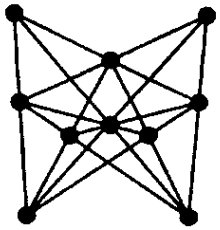


图 4

其实,10 棵树每行栽 3 棵可栽的最多行数也不是 10,而是 12,见图 4.

英国数学家、逻辑学家道奇生(Dodgson,C.L.)在其童话名著《艾丽丝漫游仙境》中也提出下面一道植树问题:

10 棵树栽成 5 行,每行栽 4 棵,如何栽?

此题答案据称有 300 之众,下面图 5 ~ 10 给出了其中的几种.

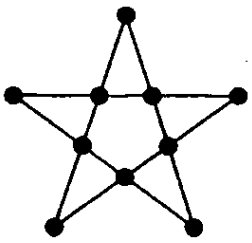


图 5

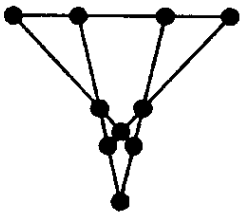


图 6

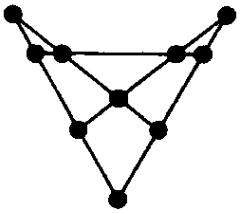


图 7

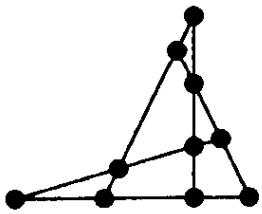


图 8

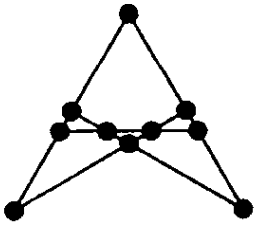


图 9

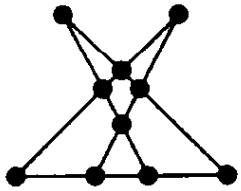


图 10

另一位英国著名趣味数学家亨利·E·杜登尼(Dudeney, H. E.)在其所著《520 个难题》中也提出了下面的问题:

16 棵树栽成 15 行,每行栽 4 棵,如何栽?

杜氏的答案见图 11.

美国趣味数学大师山姆·洛伊德(Loyd, S.)曾花费大量精力研究"20 棵树每行栽 4 棵,至多可栽多少行"的问题,他给出了可栽 18 行的答案,见图 12.

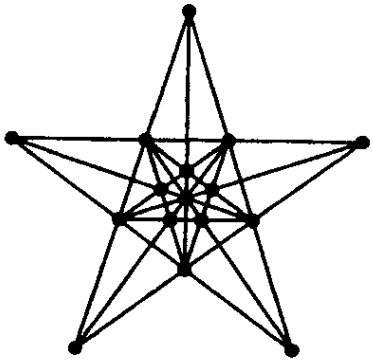


图 11

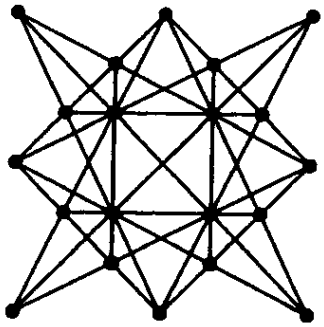


图 12

几年前人们借助于电子计算机给出了上述问题可栽 20 行的最佳方案(又是五角星图案,我们至少已遇到过四次),见图 13.

稍后曾见报载,国内有人给出可栽 21 行的方案(然而严格的验证工作恐非易事——这些点是否真的共线? 见图 14,既便结论无误,但它是否是可栽的最多行数,人们尚不得而知).

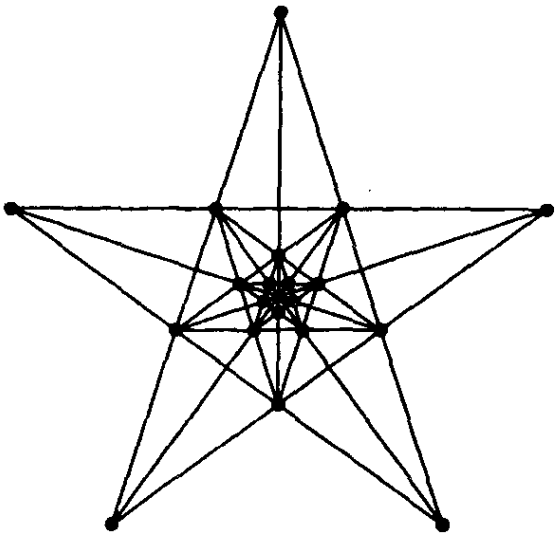


图 13

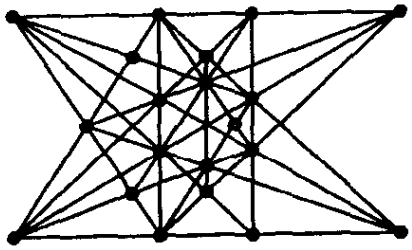


图 14

问题没有完结，当有人发现上述问题与现代数学的某些分支有关时，人们不得不重新审视这些问题的内涵．首先，人们会考虑：

n 棵树每行栽 k 棵$(0 < k \leqslant n)$，至多能栽多少行？

我们希望能够找到这个与 n, k 有关的、所栽最多行数的表达式 $Q(n, k)$，然而问题竟是意想不到的艰难．

在方程、矩阵、行列式理论研究中都作过重要贡献的英国数学家薛尔维斯特(Sylvester, J.J.)对于几何研究也极有兴趣，他在临终前几年(1893 年)提出的貌似简单的问题[4]：

平面上不全共线的任意 n 个点中，总可以找到一条直线使其仅过其中的两个点．

直到 1933 年才找到一个繁琐的证明．尔后 1944 年、1948 年又先后有人给出证明．1980 年前后，《美国科学新闻》杂志重提旧事时，又一次向人们介绍了薛尔维斯特问题和凯利(Kelly, L. M.)于 1948 年给出的证明．

其实，上述命题是薛尔维斯特追踪前面植树问题时提出的，

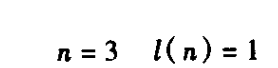
他曾考虑过：

任意4点均不共线的平面上的 n 个点，如何布置可使有3点同在一条直线上的直线条数最多？

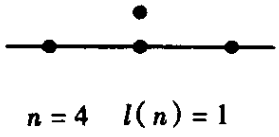
显然，这是在求 $l(n,3)$ 的表达式．为方便计，将 $l(n,3)$ 简记为 $l(n)$．

20世纪70年代，德国数学家希策布鲁赫(Hirzebruch, F.)在研究现代数学的一个分支——代数几何(研究若干代数方程的公共零点构成的集合的几何性质的学科)中的歧点理论时，惊讶地发现：它与植树问题有关联，特别是与 $l(n)$．其实，这类问题也属于组合数学、计算几何等．

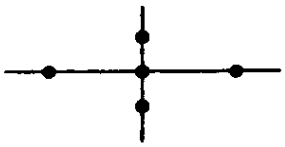
然而，遗憾的是，至今人们未能给出 $l(n)$ 的表达式，不过对于 $3\leqslant n\leqslant 12$ 和 $n=16$ 的情形，人们已给出确切的答案：



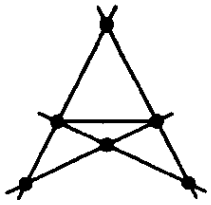
$n=3$　$l(n)=1$



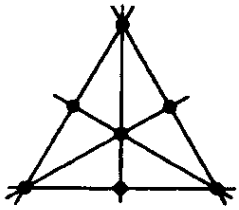
$n=4$　$l(n)=1$



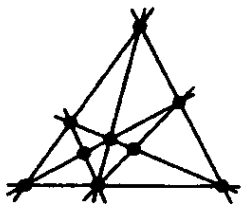
$n=5$　$l(n)=2$



$n=6$　$l(n)=4$



$n=7$　$l(n)=6$



$n=8$　$l(n)=7$

$n=9,10$ 的情形，我们前面已经给出图样．

$n=11$ 时，$l(n)=16$；$n=12$ 时，$l(n)=19$；$n=16$ 时，$l(n)$

=37.至于其他的一些 n 值,人们仅仅知道它们的上、下界,比如:

n	13	14	15	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$l(n)$的下界	22	26	31	40	46	52	57	64	70	77	85	92
$l(n)$的上界	24	27	32	42	48	54	60	67	73	81	88	96

一般的,人们仅证得下面的结果:

$$\left\lfloor\left(\frac{n(n-1)}{2}-\left\lceil\frac{3\pi}{7}\right\rceil\right)/3\right\rfloor$$

$$\geqslant l(n)\geqslant\left\lfloor\frac{n(n-3)}{6}\right\rfloor+1.$$

这里$\lfloor x\rfloor$表示不超过 x 的最大整数,而$\lceil x\rceil$表示不小于 x 的最小整数.

上述不等式右端,是 1868 年由薛尔维斯特给出的.

1974 年,布尔(Burr,S.A.)等猜测,除 $n=7,11,16,19$ 外,

$$l(n)=\left\lfloor\frac{n(n-3)}{6}\right\rfloor+1.$$

然而,这一点至今尚未被人们证得.

至于 $l(n,k)$的问题,似乎更未取得象样的成果.

8.省刻度的尺子

早在二百多年前,数学大师欧拉(Euler,L.)就曾研究过天平砝码的最佳(省)设置问题,同时给出了:

若只允许砝码放在天平的一端,则有 $2^0(1),2^1,2^2,\cdots,2^k$ 克重的砝码,可以称出 $1\sim 2^{k+1}-1$ 之间任何整数克重的物品.

若允许砝码放在天平的两端,则有 $3^0(1),3^1,3^2,\cdots,3^k$ 克重

的砝码，可称出 $1\sim\frac{3^{k+1}-1}{2}$ 之间任何整数克重的物品.

这个结论在今天看来，实际上与“二进制”和“三进制”表示有关.

在“节省”的意义下，人们又在考虑另一类问题：省刻度尺问题.

对于寻常带有刻度的尺子大家并不陌生，然而“省刻度的尺子”你也许就不一定熟悉了.

前文提到的、被人们称为“智力游戏大师”的英国人杜德尼，在仔细研究尺子的刻度与度的功能后发现问题：

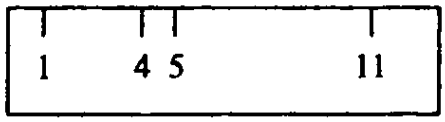
尺子的刻度可否节省一些？

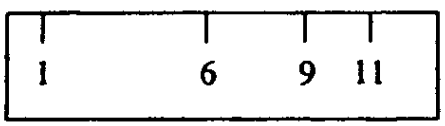
回答是肯定的.比如，一根6 cm长的尺子，只须在1 cm和4 cm处刻上两个刻度，用它便可完成 1～6 之间任何整数厘米长的物品的度量：

我们用 $A\to B$ 表示从刻度 A 量到刻度 B，那么则有：

$1(0\to1)$，$2(4\to6)$，$3(1\to4)$，$4(0\to4)$，$5(1\to6)$，$6(0\to6)$.

同样对一根 13 cm 长的尺子，只需 4 个刻度便可完成上面类似的度量，这儿至少有两种方案：





(1)刻度为 1,4,5,11 cm 处;

(2)刻度在 1,6,9,11 cm 处.

核验工作请你完成.

而一根 22 cm 的尺子要完成上面的度量只需 6 个刻度,它至少也有两种方案:

(1)刻度在 1,2,3,8,13,18 cm 处;

(2)刻度在 1,4,5,12,14,20 cm 处.

日本人藤村幸三郎还发现:一根 23 cm 的尺子只需在 1,4,10,16,18 和 21 cm 处刻上刻度,使可量出 1 ~ 23 任何整数厘米长的物品.

英国人约翰·李奇(Leech,J.)发现:36 cm 长的尺子只需在 1,3,6,13,20,27,31,35 等厘米处刻上刻度可完成 1 ~ 36 任何整数厘米长物品的度量.

前苏联的勒·莫·拉帕沃克(Лабавок,Лл. М.)在《消遣数学》一书中指出:40 cm 长的尺子,只需在 1,2,3,4,10,17,24,29,35 cm 处刻上刻度,可完成 1 ~ 40 任何整数厘米长的物品.

一根 50 cm 长的尺子可在 1,3,6,13,20,27,34,41,45,49 或 1,2,3,23,28,32,36,40,44,47 cm 处刻上刻度亦可完成 1 ~ 50 cm 的完整度量.

这个问题貌似简单,然而一般的情形比如:

(1)n cm 长的尺子,至少要多少个刻度才能完成 1 ~ n cm 的上述度量?

(2)k 个刻度,至多能完成多少厘米以内的上述度量?

上述问题,人们至今未找到确切答案.然而这类问题人们却找到了它的应用.

下表给出了上述问题的某些结果,不过表中的刻度并不完备(有的可能差 1,2 个刻度,这样的尺子我们称为“亚省刻度

尺"),缺少的刻度请你试着补上:

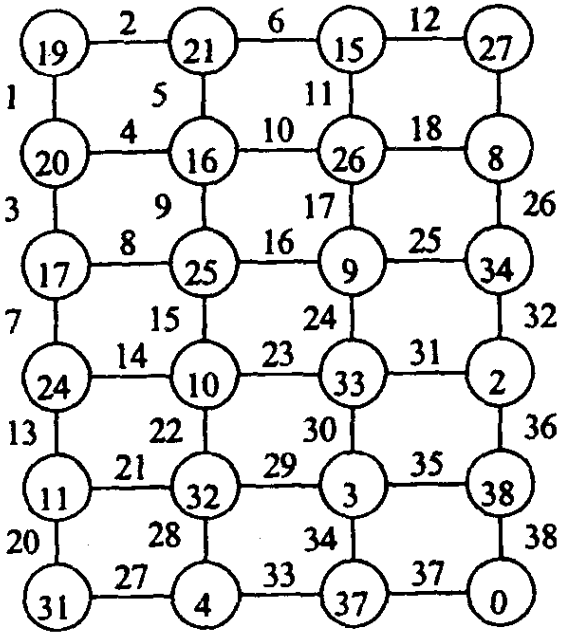
刻度数	尺　长	刻　　度
1	3	1
2	6	1,4
3	11	1,4,9 或 2,7,8
4	17	1,4,10,12; 1,4,10,15; 1,8,11,13; 1,8,12,14
5	25	1,4,10,18,23; 1,7,11,10,23; 1,11,16,19,23; 2,3,10,16,21; 2,7,13,21,22
6	34	1,4,9,15,22,32
7	44	1,5,12,25,27,35,41
8	55	1,6,10,23,26,34,41,53
9	72	1,4,13,28,33,47,54,64,70; 1,9,19,24,31,52,56,58,79

应该指出:省刻度尺问题已不再只是貌似简单的数学游戏问题,它与图论中某些问题研究有着密切联系,此外,它在 x - 射线晶体学,雷达脉冲码,导弹控制码,卷积码,同步机码,通讯网络和整电压发生器设计等诸多领域内,已得到应用.

9.完美标号

这是一个有趣的填数问题:

将 0 ~ 38 中的 24 个数填入下图 24 个圆圈中,然后计算相邻圆圈中两数差的绝对值,再把它记在连接该两圆圈的连线上(共有 $5\times4+6\times3=38$ 条).请问能否使这些数差的绝对值恰好为 1 ~ 38?

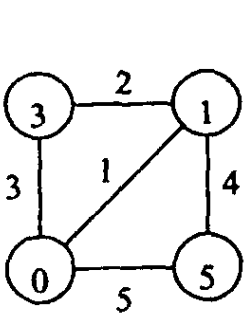


答案是肯定的，如上图所填即为所求.人们把这种具有完美标号特性的图形称为完美标号图.

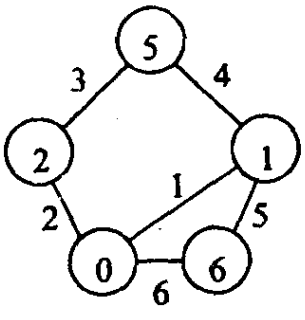
1977 年美国数学家伯登迪克(Bothendieck)发现：

n 边形再添加一条对角线后(恰好构成 n 个顶点 $n+1$ 条边的图形)，在它顶点处从 $0 \sim n+1$ 个数字选出 n 个填入，相邻顶点所填数差的绝对值恰为 $1 \sim n+1$ 的填法是存在的.

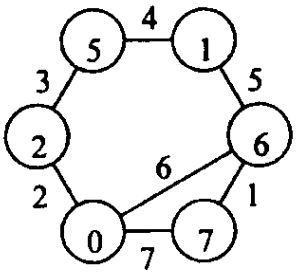
比如下面诸图标号，它们均为“完美的”.



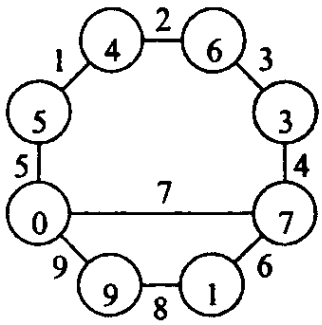
$n=4$



$n=5$

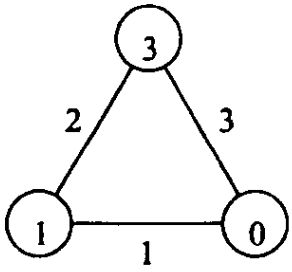


$n=6$

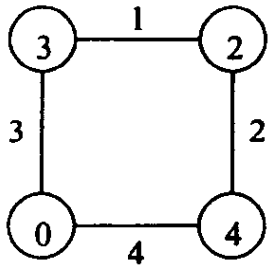


$n=8$

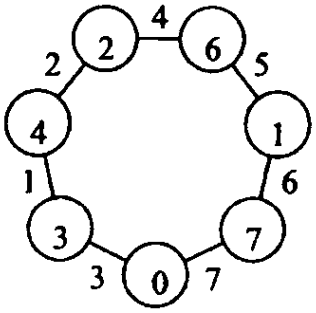
此外,该数学家还证明了:$n=4k$ 或 $4k+3$ 时,n 边形的完美标号是存在的.请看下图:



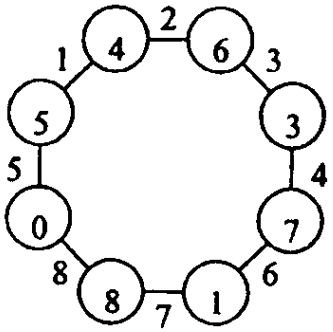
$n=3$



$n=4$

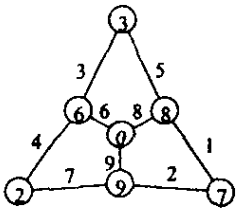


$n=7$

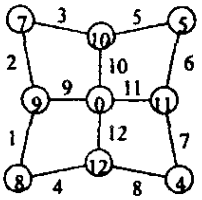


$n=8$

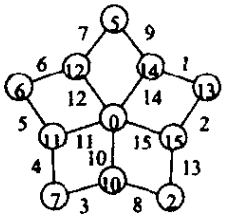
1978 年霍迪(Hoede, C.)和库皮尔(Kuiper, H.)证明了星轮状图形完美标号问题的存在.比如:



三星轮

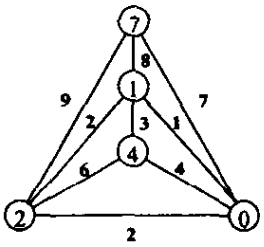


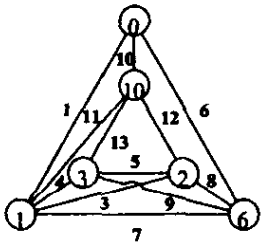
四星轮



五星轮

其实，上面的所谓“完美标号”，严格地讲应称之为“差完美标号”，因为它是将节点标号求差而得.还有一种“和完美标号”问题，即将某些数值标在图的节点处，而将线段上标出两节点的和值，若构成某些连续自然数，则该标号亦称为完美的.下面是两个和完美标号图：



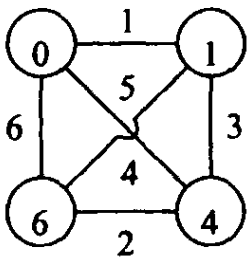


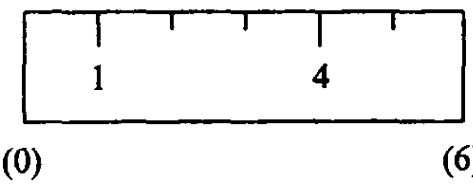
这类问题的一般情形，尚待人们去研究.

我们还想谈谈“省刻度尺”与“完美标号”问题的联系.

上面我们介绍了“省刻度尺”和“完美标号”(这里指差标号)两个问题，看上去它们似乎风马牛不相及，其实不然，这两类问题间存在着密切的联系，说得严格些，它们本质上是同一类问题.

比如我们可能把6厘米长的省刻度尺的刻度与下面完美标号图的标号相对应：





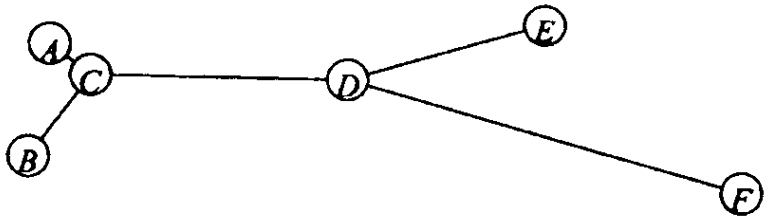
(0)　　(6)

四边形顶点处的“标号”恰为省刻度尺的“刻度”.

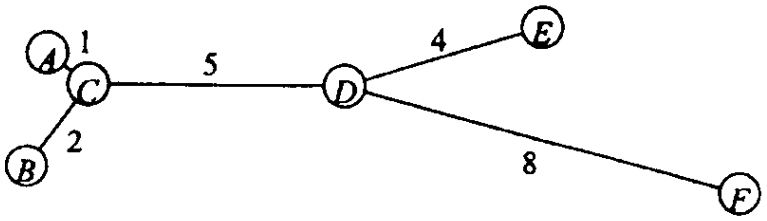
容易看出:完美标号的某些要求要比省刻度尺的刻度问题来得宽松,因而人们对此问题的研究,常从图形完美标号入手.

我们还想指出一点,与完美标号有关的(或类似的)问题还有许多,比如:

下图有五条线段,它们的长各为多少时,可以得到线段和为1~15的全部情形?



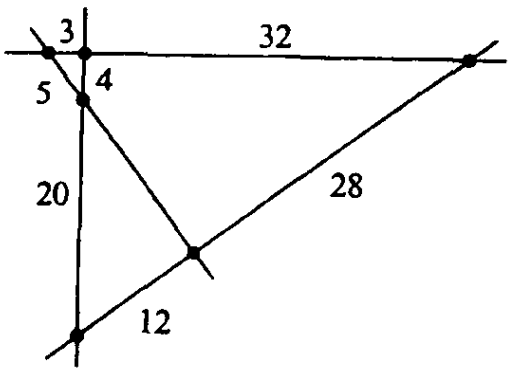
这个问题与砝码问题有点类似,也可视为省刻度尺问题的一种变形.稍稍推算不难有下面答案:



图中显然给了线段和为1~15的全部情形.

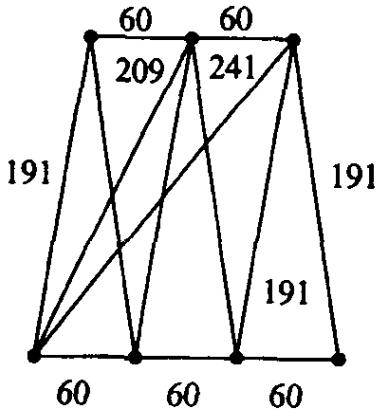
另一类问题是:平面上6个点,其中无三点共线、无四点共圆,试问它们任两点间的距离能否全部为整数?

这个问题至今未能获解,不过人们放松了某些要求,比如允许至多三点共线、四点共圆,人们仅找到一个其中部分线段为整数的例子:

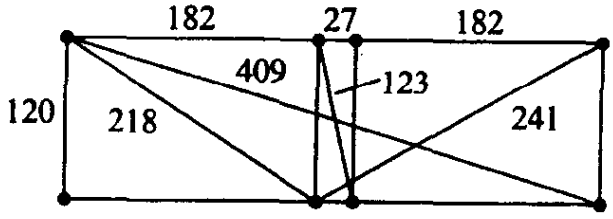


六个点的情形

又如若允许至多四点共线、四点共圆，对于七个点、八个点的情形约翰·李奇给出了下面的解：



七个点的情形



八个点的情形

另一个问题是：平面上是否存在这样的点，它到某正方形各顶点距离皆为有理数？

起初人们认为：若点不在正方形一边上，则要求它到正方形某三个顶点距离皆为有理数的情形也不存在.

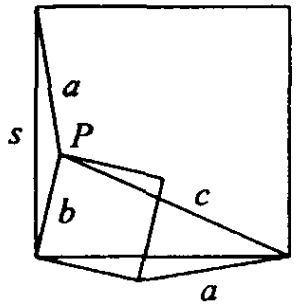
但康韦(Conway, J.)等人从方程

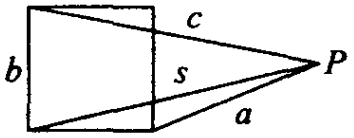
$$(s^2 + b^2 - a^2)^2 + (s^2 + b^2 - c^2) = (2bs)^2$$

找到无穷多组有理解，于是他们得到这样的点 P，使它到边长为 s 的正方形三顶点距离分别为 a, b, c.(见下左图)

此外还可以得到到边长为 b 的正方形三顶点距离分别为

a,c,s 的另一种情形(见下右图):





它实际上是从上组解中摘取部分图形后的结论.

如果再要求 P 到正方形第四个顶点距离亦为有理数,则还需要求等式:

$a^2 + b^2 = b^2 + d^2$. (d 为 P 到正方形第四顶点距离)

在三距离问题中,s,a,b,c 之一为 3,4,5 的倍数;

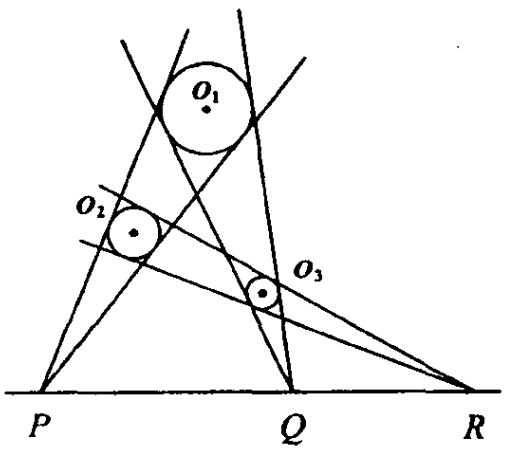
在四距离问题中,若 s 是 4 的倍数,则 a,b,c 为奇数;若 s 无 3(或 5)的因子,则 a,b,c,d 中的两个是 3(或 5)的倍数.

10.巧　　证

巧也是美——因为它简洁、明快、和谐.

美国科内大学工程系教授、数学家斯威特(Sweet)在为一道初等几何题的证明而大伤脑筋,这个命题是这样的:

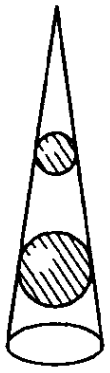
平面上给定三个半径各不相等的圆,则它们两两的外公切线交点共线(如图,P,Q,R 共线).



起初他真是不知如何下

手,真的若用纯平面几何方法去证明的确远非一件易事.教授为此考虑了好几天.一天,他望着桌子上的水晶玻璃球发呆,看着,想着,突然发现了问题的突破口:

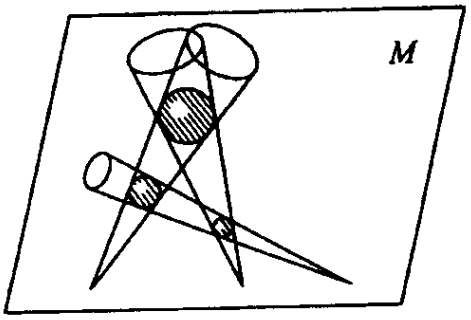
试想:平面 M 上放着三个半径不一的球(它们的半径分别与已知圆的半径相等),则原来的圆的三对外公切线可相当于外切于三个球中的两个球的三个圆锥的母线,且这三个圆锥均躺在承受三球的平面 M 上,知三圆锥顶点亦在该平面 M 上.



外切于两球的圆锥

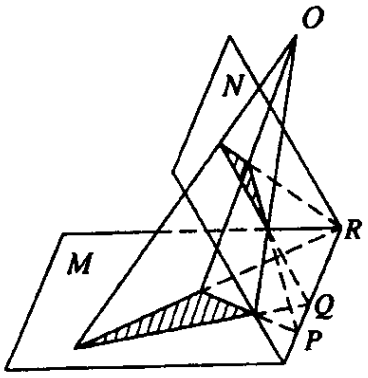
我们再用一张平面 N 放在三球上,平衡后它们恰好分别与三球相切(注意不共线的三个点可确定一个平面),因而也和这三个圆锥侧面都相切,这三个圆锥顶点必在平面 N 内.

因三圆锥顶点既在平面 M 内,又在平面 N 内,则必然在平面 M 和 N 的交线上,而圆锥的三顶点即为三圆的三对外公切线交点.



其实上面解法中(或者说结论中)蕴含着极深刻的数学背景,它与笛沙格定理(它是数学的一个分支,射影几何的基础定理)的结论有着惊人的相似:

不在同一平面的两个三角形,若它们相应顶点连接线交于一点,则其相应边延长线交点共线(笛沙格(Desargues,G.)定理).



你仔细对照一下,也许会发现其中的共通处.

附记 用纯几何推理证明该问题相当复杂,下面命题及证明摘自[法]J·阿达玛名著《初

等几何教程》

定理 与同一图形位似的两图形，彼此互相位似，并且三个位似中心在同一直线上.

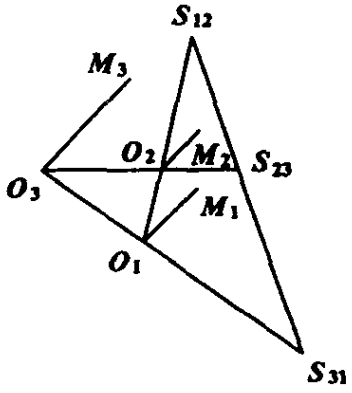
证 设图形 F_2，F_3（见下图(1)）和同一图形 F_1 位似；设图形 F_1 上某一定点 O_1 在图形 F_2 和 F_3 中的对应点是 O_2 和 O_3；图形 F_1 上任一点 M_1 的对应点是 M_2 和 M_3.

线段 O_2M_2 和 O_3M_3 都平行于 O_1M_1，所以平行；它们或者恒同向[如果它们都和 O_1M_1 有同向，或都和 O_1M_1 有反向，就是说，如果两个位似 (F_1, F_2)和(F_1, F_3)方式相同]，或者恒反向(如果起初的两个位似方式不同)；

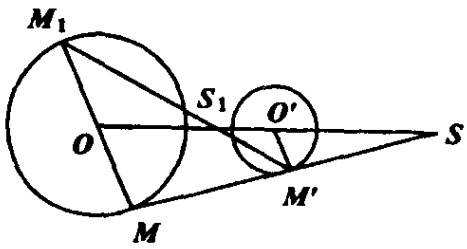
最后它们的比是常数，因为由等式$\frac{O_2M_2}{O_1M_1}=k$以及$\frac{O_3M_3}{O_1M_1}=k'$，可推得

$$\frac{O_3M_3}{O_2M_2}=\frac{k'}{k}.$$

于是两图形 F_2 和 F_3 确相位似.并且，如果起初的两位似方式相同，就是正位似，否则就是反位似.



(1)



(2)

如上图(1)，现在设 S_{23} 是 F_2 和 F_3 的位似心，S_{31} 是 F_1 和 F_3 的位似心，S_{12} 是 F_1 和 F_2 的位似心；则这三点在同一直线上.

事实上，若把点 S_{23} 看成属于图形 F_2，那么它在图形 F_3 的对应点就是它自身；它在图形 F_1 以某一点 S 作为对应点，直线 SS_{23} 既通过点 S_{31}（因系联图形 F_1 和 F_3 的对应点的直线），又通过 S_{12}（因系联图形 F_1 和 F_2 对

应点的直线).

同时注意到:

设 O 和 O' 是两圆的圆心,那么两条同向平行的对应半径端点 M,M' 满足正位似图形的对应点,画两个正位似形(见图);同理,两条反向平行的半径端点 M_1 和 M' 是两个反位似形的对应点:在此两种情况下,相似比等于两半径之比,见上图(2).

因此,这两圆周有两个相似中心 S,S_1;一个对应于正位似,称为**外相似心**,另一个对应于反位似,称为**内相似心**,两圆周的两个相似中心将联心线调和分割,因为每一相似中心将它所分成的比等于两半径之比.

一条外公切线的两个切点成正位似,因为经过这两点的半径是同向平行的.仿此,一条内公切线的两个切点成反位似.

并且,两外公切线(如存在)相交于外相似心;两内公切线(如存在)相交于内相似心.

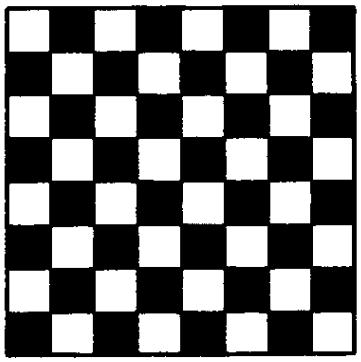
若两圆周相似,则切点是一个相似中心.

注 两圆周不能以两种以上的不同方式相位似.

因为如果有位似,则圆心相对应,且对应半径平行,因它们有同向或反向,就得到上面所讲的这种或那种位似.

11.“梵塔”与新奇解法

国际象棋的发明者达依尔(Dahir,S.B.)得到国王的赏识和重奖.当国王问及达依尔要何奖赏时,达依尔说:他只要一些麦子.



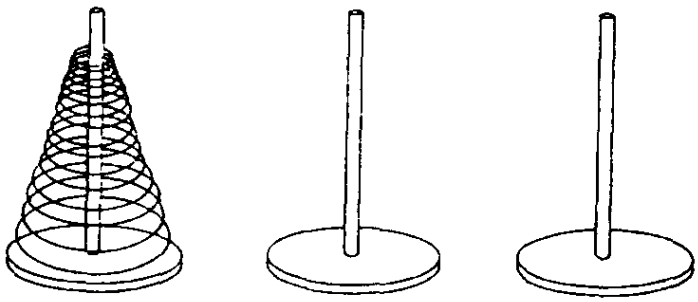
多少?只需在他发明的象棋盘(共 $8\times8=64$ 格)上第 1 格放 1 粒,第 2 格放 2 粒,第 3 格放 4 粒……,以后每格只需放前一格麦粒数两倍的麦粒.

起初国王以为达依尔傻得可爱,但当他坐下来仔细一算才发觉他上当了:达依尔要的麦子总数为

$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}=2^{64}-1$(粒)

这是大得让人无法想象的数(若把这些麦粒排成4米高、10米宽的"麦墙",它将有3×10^8千米长!这是地球到太阳距离的80倍!)

有趣的是另一个问题也与2^{64}有关,即"梵塔"问题.



传说世界中心贝舒勒斯的一座圣庙,放着三块插着铜针的铜盘,其中一块从上到下放着64块圆金片(从小到大)——人称"梵塔".

庙中僧人不分昼夜地把金片在三根铜针上移来移去:一次移一片,且要求每次移动时小金片只能移到比它大的金片上,最终将金片全部移到另一铜针上去,人们算到:如果真的将全部金片按要求从一根铜针移到另一铜针上,移动的次数恰好是

$$2^{64}-1=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

假若金片每秒钟可移动一次,这大约需5845亿年——到时,地球也许不复存在了(地球寿命约200亿年).

这个问题看上去似乎不难,但真的操作起来却十分繁琐(不信的话你可以试试看).

然而美国人工智能专家拉南(Ranan,B.B.)在考虑问题解法时(如何操作),提出一种出人意料的简单方法,移动金片时只须

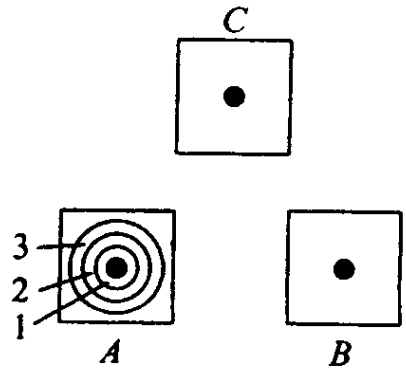
循下面两步操作：

1.第1片金片(最小的)永远按固定方向移动；

2.其余的金片只须移到它允许移动的位置.

这一发现，使数学家、人工智能专家和机器人工程师都目瞪口呆了！

比如三片金片的情形，最小的一片永远按照 $A, B, C, A, B, C\cdots\cdots$ 方向顺序移动，其余的只须移到它允许移动的位置即可.具体操作如下：



①($A\to B$)；②($A\to C$)；①($B\to C$)；③($A\to B$)；①($C\to A$)；②($C\to B$)；①($A\to B$)，至此金片全部移至 B.

这里①，②，③表示金片号码，$A\to B$ 表示该金片从 A 移至 B 等等.

12.投针法计算π值

圆的周长和直径的比值——圆周率(人们常用π来表示它)是一个理论和实践上都很重要的数值，但它是一个无限不循环小数(无理数，说得确切些它是一个超越数)，因而计算它十分困难，特别在电子计算机问世之前.

我国古算书《周髀算经》上就有“径一周三”的记载，这是当时人们对于圆周率的认识(它的数值为3)，后人称之为“古率”.

南北朝时数学家祖冲之在《缀术》一书用“割圆法”给出$\frac{22}{7}$(约率)和$\frac{355}{113}$(密率)两个用分数表示的圆周率，它们已分别精确

到小数点后两位和六位，这比国外的同类发现要早一千多年.

古希腊学者阿基米德(Archimedes)用“割圆法”证明了：

$$\frac{22}{7}<\pi<\frac{223}{71}.$$

16 世纪初，法国人叶维塔(Ievita)用正 393 216($=6\times2^{16}$)边形近似圆而得到 π 的十位小数值.

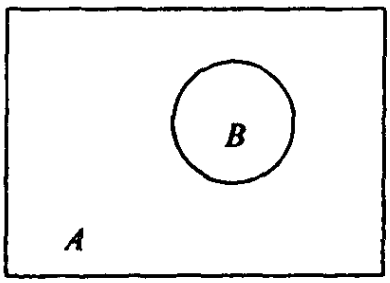
稍后荷兰数学家鲁道夫(Ludolph, van C.)花了毕生精力将 π 算到小数点后 35 位，后人曾将这个数值刻在他的墓碑上以示纪念和彰昭.

电子计算机出现之后，π 的计算变得相对容易了，人们编制好程序，利用大型高速电子计算机可轻而易举地将 π 值算到小数点后十万、百万、千万、甚至千亿位.

到 1996 年为止，π 的计算位数的纪录是 515.396 亿，这是日本科学家金田康正完成的.当然人们的这种计算已经成了计算机的软、硬件功能测试的一种手段，当然它也有数学上的意义(如发现 π 的算式中数码出现的规律等).

好了，下面我们说说 π 计算的另一个有趣话题——投针法计算 π 值.

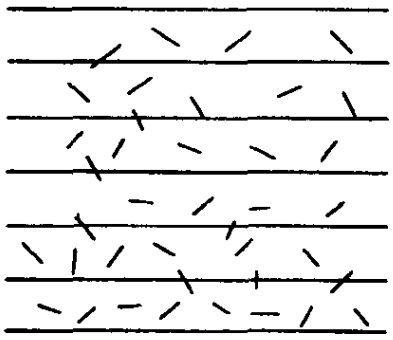
法国博物学家布丰(Buffon, G. L. L.)曾任法国皇家植物园园长，也曾致力于宇宙和物种起源的研究，他试图从大量的偶然现象中去寻找其内在的变化规律，这自然涉及到数学的一个分支——概率论(研究偶然事件发生、发展规律的数学分支)的内容.



他知道，向一张画有圆的大纸上随机地投一枚小石子，投中圆 B 的可能(概率)恰好等于 $S_{圆B}:S_{矩形A}$，即等于圆 B 面积与矩形面积比.由此，他

可通过统计投石子的次数与石子落入圆内的次数来确定这个比值，进而可算得（近似地）圆 B 的面积，最后可算得圆周率 π 的近似值.

接着，布丰经过反复思考、计算，又提出了一个看上去令人不可思议的方法：在一张大纸上画上一系列相距 l 的平行线，然后截一根长为 $\frac{l}{2}$ 的细铁丝（或针），你随机地将细铁丝扔到画着平行线的大纸上，细铁丝落到纸上后可能与直线相交，也可能不相交.记下扔的总次数 m，再记下其中细铁丝与平行线相交的次数 n.扔一定次数后，$\frac{m}{n}$ 即为圆周率的一个近似值.



资料记载，有人投了一定次数的针后所得 π 的值如下表：

试 验 者	年 份	投计次数	π 的近似值
沃 尔 夫（Wolf）	1853	5000	3.159 6
斯 密 思（Smith）	1855	3204	3.155 3
福克斯（Fox）	1894	1120	3.141 9
拉札瑞尼（Lazzarini）	1901	3408	3.141 592 9

从表上可以看到：投针次数多少与 π 的精度无关，次数少不一定精度不高，这样你也许会问：

投针次数为多少时停止最好？由此产生了数学的一门新的分支——最优停止理论（用算法思想来建立数学真理）.

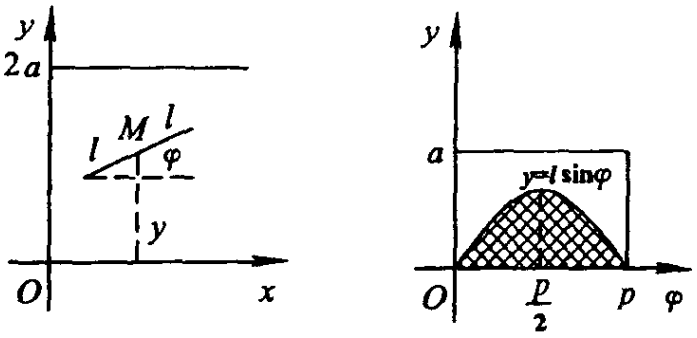
布丰问题的方法其后发展为现代统计学上的所谓“蒙特卡

罗(Monte Carlo)方法",它在许多复杂的计算问题中(无论是确定性的,还是随机性的)均有应用,特别是在电子计算机出现之后.

附记　关于投计法计算圆周率的原理

设平面画有相距 $2a$ 的平行线束,随机投的针长为 $2l$.为避免针与两平行直线同时相交的复杂情况,规定 $0<l<a$.

设 M 为针的中点,y 为 M 与最近平行线的距离,φ 为针与平行线交角(下左图),则有　$0\leqslant y\leqslant a$,　$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.很明显,



针与平行线相交$\Longleftrightarrow y\leqslant l\sin\varphi$.

这样针与平行线相交的概率为:

$$p=\frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{l\sin\varphi}\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi}l\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{2l}{\pi a}.$$

又蒙特卡罗法亦称为随机模拟方法,有时也叫做随机抽样方法,其基本思想是:

为了求解数学、物理、工程技术以及管理等方面的问题,先建立一个概率模型,使之参数等于问题的解,然后对模型的观察或抽样试验来计算所求参数的统计特征,最后给出所求解的近似值(精度可由估计值的标准差表示).

附注　下面又是一则"数学天方夜谈",稍有点概率知识的人也不会轻信某些人的呓语梦话:

运用概率学统筹学对策学，成都一“专家”有妙论

60万元买断中奖号

《成都商报》近日刊文称一名“专家”可探寻中奖号码的规律.9月17日，家住成都羊西线的王先生为此与“专家”进行了一次面谈.

专家给王先生提出了一个颇具战略性的建议.“专家”称，他除了运用概率学之外，还将把统筹学、对策学(即博弈论)的方法纳入其中，重点“擒拿”第一位数.拿准了第一位数，它与后面的几组数最多能够自由组合出50万个号码.这50万个号码中，类似1 111 111、1 333 333、1 666 663、1 662 222等码出现的机(几)率几乎接近零，去除这些“无效”号码，经过计算，如果3个人进行合作，每人只需投资20万元，共计集资60万元，就能将“有效”号码全部买断，如果成功，包括特等奖号码在内的所有奖项将囊括其中；如果不成功，除了特等奖和一等奖之外的二、三、四等奖绝难漏网.从第六期返还的特等奖和一等奖之外的奖金来看，早已超过100万元，跟所花的“成本”比起来，也多少还有赢余，也就是说，“亏”的可能性微乎其微.

王先生闻言大感兴趣，与“专家”约定，对下周开彩的第七期彩票先进行一次“模拟实战演习”，只要亏得不多，他将在第八期投入重金试一把运气.

(摘自2000年9月19日《羊城晚报》邓彤　曹圣明文)

四 常数探幽

1.黄金数 0.618…

中外比及 0.618…

早在两千多年前,欧几里得(Euclid)就在《几何原本》中提出了“中外比”的几何作图问题(其实,据称该问题源于欧多克斯的研究,欧是古希腊的数学家):

将线段分成两段,使其中较短线段与较长线段的比等于较长线段与整个线段的比.

为了能够用尺规作出该点,人们往往是先求出它的代数表达式.

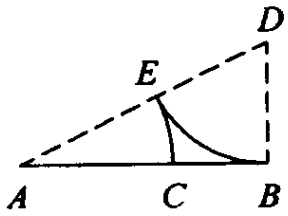
为简便计,设所给 AB 的长为 1,且设 C 为所求分点,同时设 $AC = x$,则 $CB = 1 - x$.依题意应有:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}, \quad \text{即} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

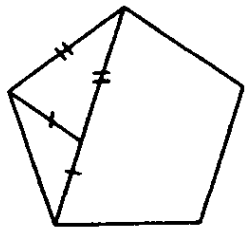
得 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (舍去负值)

而 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots$ （以下记之为 ω）

它的几何作图方法这儿不赘述了(见下左图,从中不难找出作法),它的值显然是一个无理数.



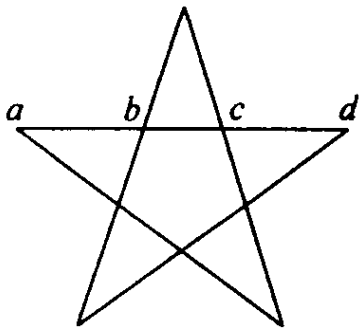
$AB=1$ $BD=0.5$

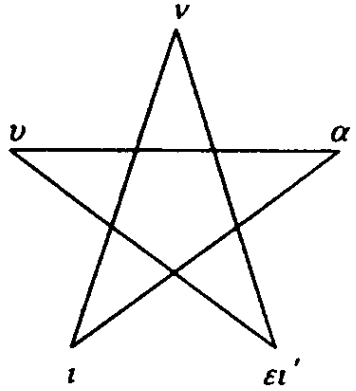


其实毕达哥拉斯(Pythagoras)学派的学者们早已发现了正五边形的边与其对角线长不可公变的事实,除了秘而不宣外,他们也对该现象进行了研究(他们曾认为"数皆可表为两整数之比",然而这里出现了意外),进而发现了五角星中蕴藏着许多中外比:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{AD}=0.618\cdots$$

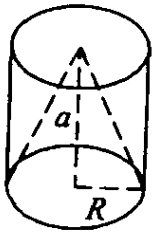
或许出于不解,或许出于新奇,毕达哥拉斯学派居然用五角星作为他们的徽标,同时在五角星五个顶点上标着 υ、ν、ι、ει′、α,它们恰好组成希腊文中的"健康"一词 υγεία.





(五角星图形出现很早,在幼发拉底河出土的五千年前的泥

板上已出现五角星图案.中世纪欧洲人曾将此图案绘在门上以避邪,德语中五角星称为 Drude 的爪,Drude 系神话中的女妖,脚似鸟爪)

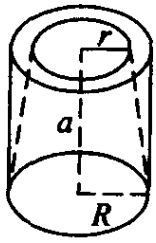


其实可以产生 0.618…的几何事实还有很多,比如边长为 3,4,5(勾三股四弦五)的直角三角形的最小锐角为 α,则 $\tan\frac{1}{4}\left(\alpha\times\frac{\pi}{2}\right)=0.618\cdots$,它是 1990 年美国人埃森斯坦(Eisenstein, M.)发现的,证明只限三角函数分式 $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$,再考虑 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的值即可.又如我们知道,在一个高为 a、底面半径为 R 的圆柱内接一圆锥,它的体积恰好为该圆柱体积的三分之一,即

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi R^2 a.$$

今问若在其(圆柱)内求一内接圆台,使其体积恰为圆柱体积的三分之二,试问此时圆台上下底圆半径之比是多少?

今设内接圆台上底半径为 r,



由 $V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi(R^2+Rr+r^2)a$,

而 $V_{圆柱}=\pi R^2 a$,

这样 $\frac{1}{3}\pi(R^2+Rr+r^2)a=\frac{2}{3}\cdot\pi R^2 a$.

即 $R^2-Rr-r^2=0$,或 $\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r}{R}\right)-1=0$.

得 $\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots$

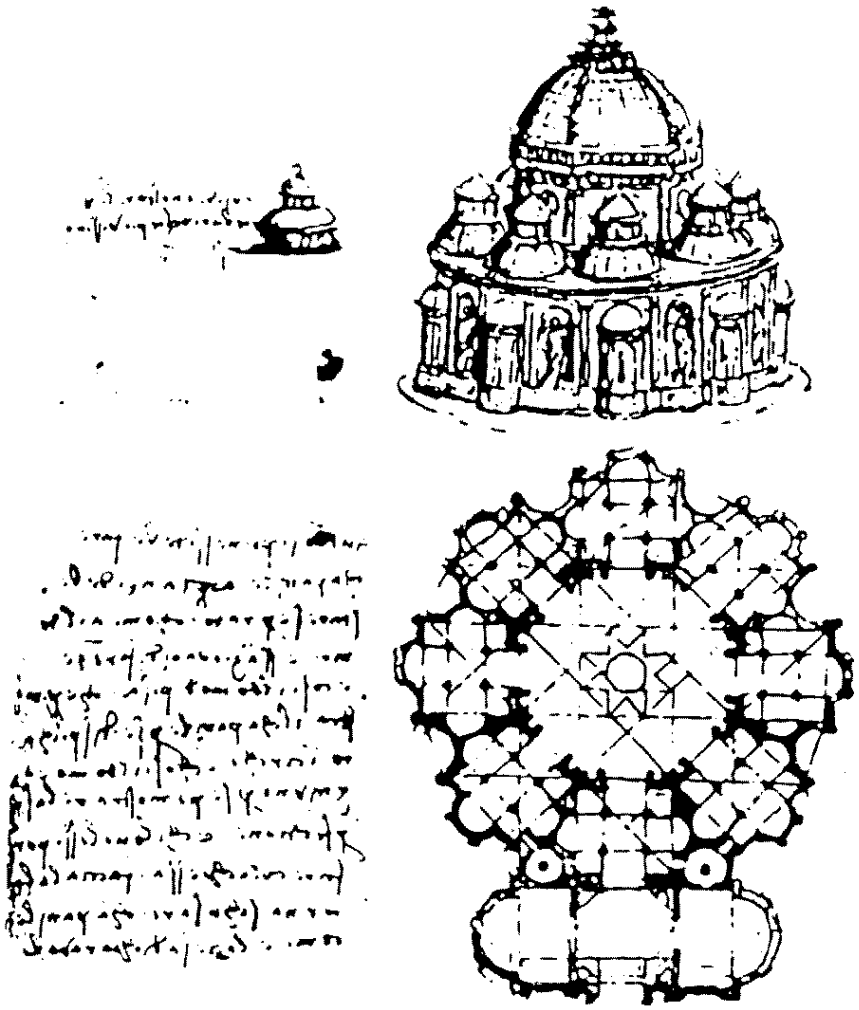
美学上的应用

中外比曾被“神”化般地应用在艺术上,特别是在中世纪的

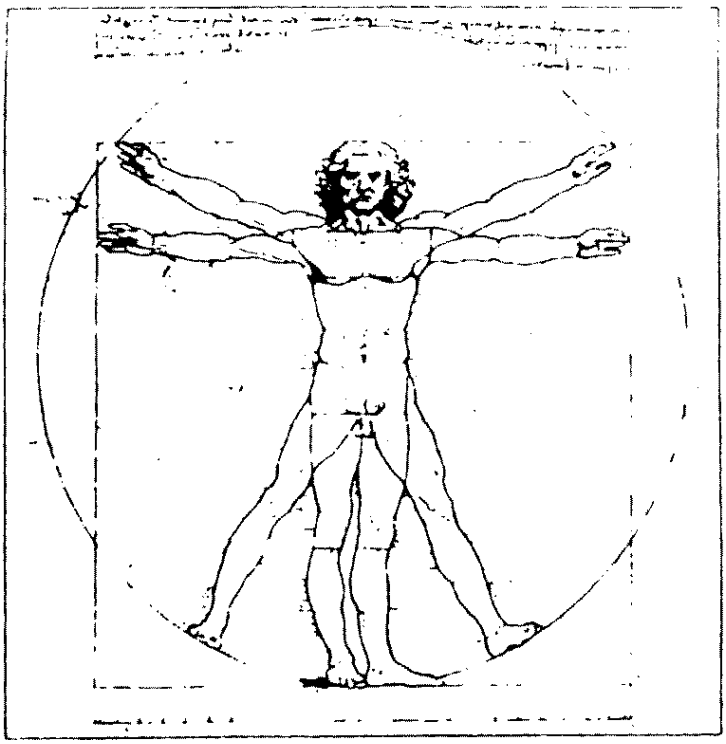
欧洲.

天文学家开普勒(Kepler,J.)曾称“中外比”系几何学中的两大瑰宝之一(另一为毕达哥拉斯定理即勾股定理).

科学家兼艺术大师达·芬奇(Da Vinci,L.)在其艺术创造、建筑设计中常常使用中外比,且誉之为“黄金比”(又一说此称谓源自德国人欧姆(Ohm,M.)的《纯粹初等数学》书中),因而0.618…便被人们称为“黄金数”.



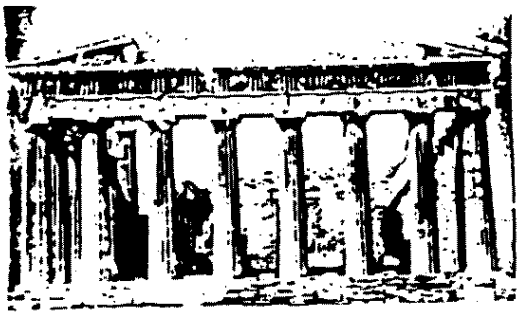
达·芬奇的建筑设计图稿



达·芬奇为《神奇的比例》所作插图，他把人体与几何中最简单又完美的正方形和圆联系到一起，图中蕴含着黄金比.

黄金分割曾统治着中世纪欧洲的建筑造型，既使是近代也不例外.

无论是古希腊的伽农神庙，还是巴黎圣母院；无论是印度的泰姬陵，还是法国埃菲尔铁塔……其中无不蕴含着 0.618…的身影.



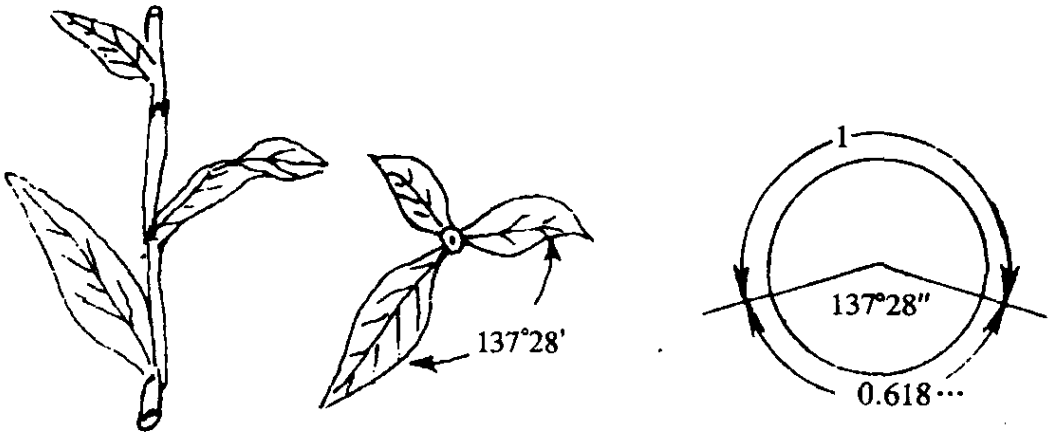
生物学上的发现

据称人的肚脐恰好是人体长的黄金分割点.其实,0.618…与生物生长有着神奇般的联系.

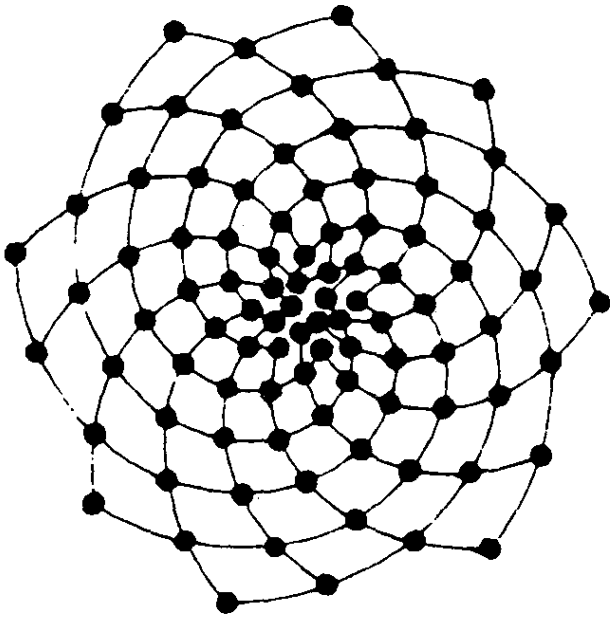
开普勒在研究叶序(叶子在植物茎上的排列顺序)问题时,意外的发现了一个有趣的现象:

首先,植物叶子在茎上的排列是螺旋状,尽管每种植物叶形会因物种而异,但它们排列的方式却呈许多共同的规律,这里面也会有与0.618…有关的问题.

比如三叶轮状排布的植物,它的相邻两叶在茎垂直平面上投影的夹角是137°28′,这种角度恰好是把圆分成1:0.618…时两半径的夹角.



科学家们研究发现:叶子的这种排列对于植物通风、采光来讲都是最佳的(因此国外有人仿此设计、建造了仿生建筑,无疑它在通风与采光方面均有长处).



向日葵盘中的两族螺线

人们似乎更早地便注意到向日葵盘中存在两族交错的螺线,早在1907年冯·伊特松(Van Iterson,G.)就试图从中找出这些螺线交错角的黄金分割事实(当然它还与所谓斐波那契(Fibonacci,L.)数列有关)且试图解释它,直到1979年法国科学家道蒂(Douady,S.)和科德尔(Couder,Y.)提出植物生长动力学理

论,且用计算机在实验室模拟出它们.

理论分析表明:向日葵果盘相继基按黄金分割角排列在螺线上时,这些基将最有效地挤在一起.

若基按十字交叉分成四条线排列时,发散角是360°的有理倍数时,将得到一系列射线,它们之间存在着空隙.要想有效地填满空间(空隙尽量小),其发散角应是360°的无理数倍.

数学家们早就认识到:最无理的数就是黄金数0.618…,因为它用有理数很难逼近.

这即是说:植物选择黄金发散角可使基元最密集、最有效地集聚.

无穷表达式

黄金数0.618…是一个"最无理的"无理数,即它是无限且不循环的小数(它的小数点后面前十位是0.618 033 988 7…).

由于黄金数的某些自身特性,它可用连分数或无穷根式表达.

令 $\tau=\frac{1}{\omega}=1.618\cdots$, 这样由

$$\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau}-1=0,\quad \text{即}\quad \tau^2-\tau-1=0,$$

可有 $\tau=\sqrt{1+\tau}$.

由之 $$\frac{1}{\omega}=\tau=\sqrt{1+\tau}=\sqrt{1+\sqrt{1+\tau}}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\tau}}}$$

$$=\cdots=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

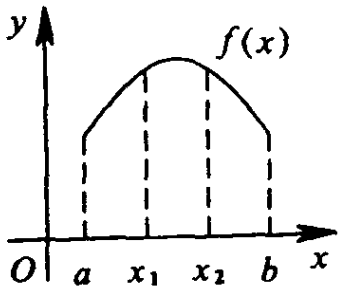
此外,由 $$\tau=1+\frac{1}{\tau}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\tau}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\tau}}}=\cdots$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

优选法及其他

优选法是一种多、快、好、省的科学试验方法.它是昧国人吉弗(Kiefer,J.)于1953年提出的.

20世纪70年代"优选法"在已故华罗庚教授的倡导下,在全国得以推广,取得巨大成功.



它也是最优方法中的一种重要方法(主要用于一维搜索).简言之,比如欲$[a,b]$上的单峰函数$f(x)$的极大点:先求$[a,b]$的黄金分割点

$x_1 = a + \omega(b-a)$,

及 $x_2 = a + (1-\omega)(b-a)$ (x_1在$[a,b]$上的对称点)

再计算$f(x_1), f(x_2)$.若$f(x_1)$小则去掉$[x_1,b]$;否则去掉$[a,x_2]$.

在余下区间上重复上述步骤,直到满足所求精度为止.

应用0.618…笔者也曾提出"小康消费"的标准:

小康消费=(高档消费-低档消费)×0.618+低档消费

它曾被国内多家报纸转载,这是对小康概念的一种量化.

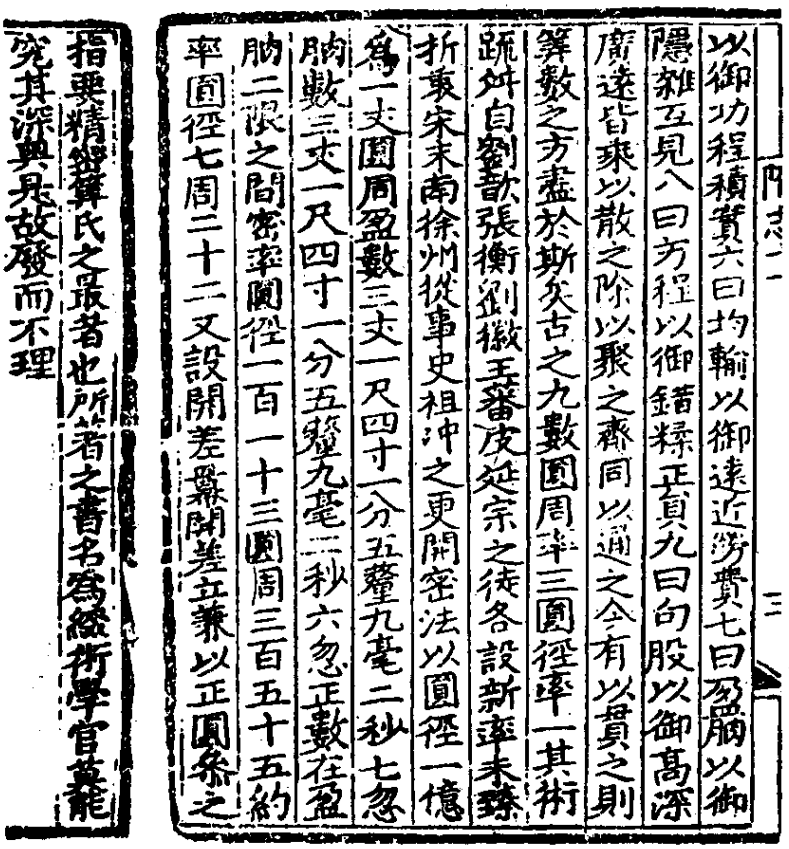
2.圆周率π

圆的周长和直径的比值——圆周率,是一个理论和实践上

都很重要的数值，但它是一个无限不循环小数，这给它的计算带来不便（尽管有许多方法可用），特别是电了计算机问世之前.

远在上古时期，我国就有“径一周三”的古率（《周髀算经》中有述）.《旧约全书·列王记》中也有使用圆周率为3的记载（公元前9世纪前后）.

公元前2世纪，古希腊学者阿基米德（Archimedes）利用圆内接与圆外切正多边形逼近圆周方法得到圆周率介于$3\frac{10}{71}$与$3\frac{1}{7}$之间.


以御功程積實六曰均輸以御遠近勞費七曰盈朒以御隱雜互見八曰方程以御錯糅正負九曰句股以御高深廣遠皆乘以散之除以聚之齊同以通之今有以貫之則算數之方盡於斯矣古之九數圓周率三圓徑率一其術疏舛自劉歆張衡劉徽王蕃皮延宗之徒各設新率未臻折衷宋末南徐州從事史祖冲之更開密法以圓徑一億爲一丈圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽正數在盈朒二限之間密率圓徑一百一十三圓周三百五十五約率圓徑七周二十二又設開差冪開差立兼以正圓系之

指要精微算氏之最著也所著之書名爲綴術學官莫能究其深奥是故廢而不理

《隋书》中关于祖冲之圆周率的记载

我国南北朝时，祖冲之在《缀术》一书中采用“刘徽割圆术”给出$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$这两个用分数（且是最佳渐近分数）表示的圆周率，它们分别被称为“约率”和“密率”（已分别精确到小数点后2位

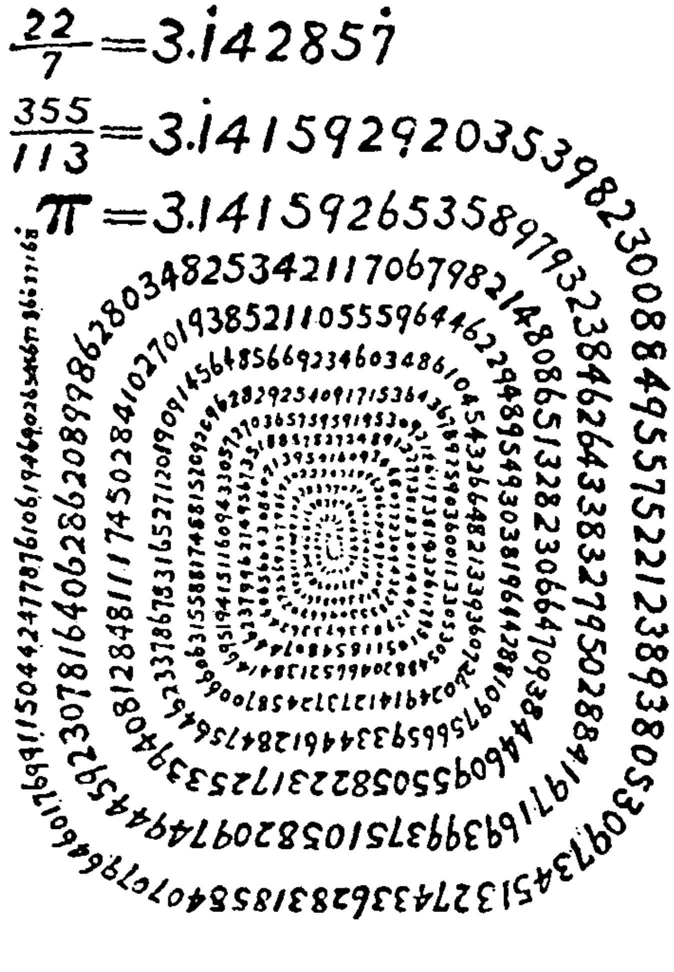
和 6 位).

大约公元 2 世纪,天文学家托勒密(Ptolemaeus, C.)算得圆周率值约为$3\frac{17}{120}$.

千余载后(16 世纪)荷兰人鲁道夫花毕生精力将圆周率算至小数点后 35 位(1610 年完成).

之后日本人关孝和(Seki, T)(1642 ~ 1708)与其弟子建部贤弘(Takebe, K.)算得圆周率的小数点后 42 位.

19 世纪英国人威廉·谢克(Shanks, W.)将圆周率算至小数点后 707 位,直到 1945 年英国人 D.F.费格森(Ferguson, D.F.)发现其 528 位以后有误.四年后,两位美国人将纪录推至小数点后 1120 位,这是人工手算圆周率的最高纪录.



电子计算机问世之后(1945 年),圆周率计算变得相对容易,1950 年三位美国科学家 Metropolis,Reitwieser 和 von Neumann 利用世界上第一台电子计算机 ENIAC 将圆周率算至小数点后 2 037位,前后共花去 70 个小时机上时间.

尔后,随着电子计算机运算速度不断加快和计算方法的屡屡改进,圆周率计算的纪录不时被刷新,截至 1996 年末,人们已将纪录改至小数点后 515 亿位,这些详见表 1.

表 1 π 的计算进展一览表

时 间	计 算 者	精确度(位数)	计算工具及花费时间
公元前 2000 年	巴比伦人	$\pi\approx\frac{31}{8}$	手算
	埃及人	$\pi\approx\frac{313}{81}$	手算
公元前 2 世纪	阿基米德 (Archimedes)	$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$	手算
公元五世纪	祖冲之	$\frac{22}{7}$ 和 $\frac{355}{113}$	手算
1706 年	Machin	100 位	手算
19 世纪	W.Shanks	527 位	手算
1947 年	两位美国人	1 120 位	手算
1950	Metropolis & Rewieser 等	2 037 位	计算机 ENIAC 约 70 小时机上时间
1955 年		3 089 位	NORC(机型,下同)
1957 年	[美]伦区·丹尼尔	100 265 位	IBM7090 8 小时 43 分
1961 年	Dan Shanks & Wrench	100 000 位	IBM 7090
1973 年	[法]Guillard & Bouyer	100 万位	CDC 7600 23 小时 18 分
1983 年	[日]田川吉明等	16 777 216 位	HITACM - 280H 30 小时
1985 年	[美]W.Gosper.Jr.	1 700 万位	
1986 年	[美]D.Bailey	29 360 000 位	Cray - 2 28 小时

（续表）

时　间	计　算　者	精确度(位数)	计算工具及花费时间
1986 年	[日]金田康正	33 554 000 位	HITACHIS－810/20 8 小时
1987 年	[日]金田康正	2^{27}位	NEC SX2 36 小时
1987 年	[日]金田康正	1.335 5 亿位	HITACHIS－820/20 35 小时 14 分
1988 年	同上	2.013 62 亿位	机型同上,5 小时 57 分
1989 年	[美]科学家	4.8 亿位	Cray－2
1989 年	[日]金田康正	5.368 7 亿位	
1989 年 (9 月)	[美]格戈里 & 戴维·查德诺斯奇	1 011 196 691 位 (约 10.1 亿)	IBM－3090
1995 年	[加拿大]乔纳森· 伯尔温 & 彼德·波尔温	42.9 亿位	56 小时
1997 年 (7 月)	[日]金田康正	515.396 亿位	约 29～37 小时(首次用 29 小时,后用 37 小时)
1999 年	[日]金田康正	2061.58 亿位	37 小时
2002 年	[日]全田康正	12411 亿位	601 小时

上述结果涉及的计算方法大体分为三类：

第一类是阿基米德和我国刘徽等人创造的用圆的内接和外切多边形逼近圆的方法(包括割圆法)；

第二类是建立在微积分学上的,它主要依据 1671 年格里高利(Gregory)发现的级数

$$\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots,\quad |x|\leqslant 1,$$

连同使用它的近似公式(当 x 充分小时)及其它公式如

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239},$$

此法一直使用到 1973 年.

第三类是建立在椭圆积分变换理论上的,这种方法基于 1914 年印度数学家拉玛奴扬(Ramanujan,S.)的文章“模方程和 π 的逼近”中提出的公式

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9\,801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1\,103+26\,390n)}{(n!)^4\,396^{4n}}.$$

尽管文章中没有给出该公式的证明(只给出一些不充分的解释,直至 1987 年公式才由乔纳森·伯尔温(Borwein,J.M.),和波德·波尔温(Borwein,P.B.)给出证明).

上述诸法或公式详见表 2.

表 2 π 的计算公式

时 间	发 现 者	表 达 式
1579 年	韦达	$\pi=2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$
1650 年	格林贝尔格 约翰·沃林斯	$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots}{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdots}$
	洛尔德·布龙克尔	$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}}$
1671 年	格里高利	$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$
1674 年	莱布尼兹	
1706 年	梅 钦	$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$
1841 年	卢瑟福	$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}$
1844 年	达 瑟	$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$
1863 年	格 斯	$\frac{\pi}{4}=12\tan^{-1}\frac{1}{18}+8\tan^{-1}\frac{1}{57}-5\tan^{-1}\frac{1}{239}$

（续表）

时间	发现者	表达式
1896 年	斯托姆	$\frac{\pi}{4}=6\tan^{-1}\frac{1}{8}+2\tan^{-1}\frac{1}{57}+\tan^{-1}\frac{1}{239}$
1914 年	拉玛奴扬	$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^3\frac{42n+5}{2^{12n+4}}$ $\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9\,801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\,[1\,103+26\,390n]}{(n!)^4\,396^{4n}}$

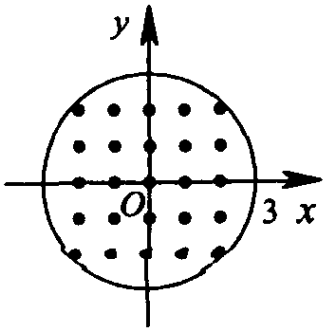
顺便讲一句，圆周率计算至如此多的数位实际意义看似不大，但人们除了希望从圆周率数字中找出点有趣或许是意外的发现外，它的计算过程本身也成了检验计算机运算性能（包括计算方法）的一种标准.

圆周率的记号 π 源自希腊语“圆周”的打头字母，17 世纪琼斯（Jones，W.）首先使用（尔后伯努利（Bornoulli，J.）、欧拉等曾用 c，p 表示，据说英国人奥兰托（Oughtreod，W.）于 1600 年曾用 π/δ 表示圆周率），经哥德巴赫（Goldhach，C.）等人倡用，到 1748 年以后，π 作为圆周率记号已广为人们接受和使用.

其实 π 的值还可以利用其他方法如平面格点及概率方法等求得其近似值（这在电子计算机出现以前，显然是 π 值计算的不可忽视的方法，当然它们还有其自身的理论价值），这儿简单介绍一下.

先来看看利用格点计算 π 值的方法.

在平面直角坐标系中，画出以坐标原点 O 为圆心、整数 r 为半径的圆，记圆内（含边界）中格点（两坐标皆为整数的点）数为 $r(n)$，其可视为该圆面积近似值 S，又 $S=\pi r^2$，从而，



$$\pi \approx \frac{r(n)}{r^2}.$$

比如 $r(3)=29, \pi \approx \frac{29}{3^2} \approx 3.22$.

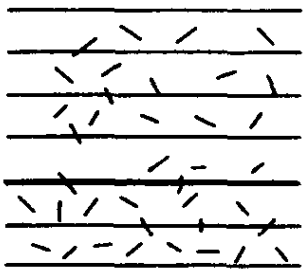
类似地有表 3.

表 3

r	$r(n)$	r^2	π 的近似值
20	1 257	400	3.142
30	2 821	900	3.134
100	31 417	10 000	3.141 7
200	125 629	40 000	3.140 7
300	282 697	90 000	3.141 0
…	…	…	…

显然表 3 中第 3 行以后的计算已给出 π 的小数点后 3 位的精确值.

利用概率方法(古典概率)计算圆周率值,是法国人布丰(Buffon, G.L.L.)于 1777 年给出的(我们前文已经详述).



取一根粗细均匀的长为 l 的针,再在一张大纸上画一组宽为 $2l$ 的平行线,然后随机地将针抛在纸上,针落下后要么与这些平行线之一相交,要么与这些平行线都不相交,记下你投针的总次数 m 和针与平行线之一相交的总次数 n,则

$$\pi \approx \frac{m}{n}.$$(结论可用概率知识严格证明)

表 4 给出一些试验者的实际操作结果.

表 4

时　间	试 验 者	投 针 次 数	所 得 π 的 近 似 值
1853 年	Wolf	5 000	3.159 6
1855 年	Smith	3 204	3.155 3
1894 年	Fox	1 120	3.141 9
1901 年	Lazzarini	3 408	3.141 592 9

顺便讲一句,从表 4 可看出,此方法算得的 π 值精度与投针数不成正比,这里涉及了一个重要的数学课题——最优停止问题(投到多少次停止可获较优的 π 的估计值).

我们已经说过:π 是一个无限不循环小数,严格地说明这一点是近 200 多年的事.

1761 年,兰伯特(Lambert,J.H.)证明 π 是无理数;

1882 年,林德曼(Lindemann,C.L.F.)证明 π 是超越数(由此也宣布了几何三大难题之一的"化圆为方"的否定解决).

1953 年,马赫勒(Mahler,K.)证明 π 不是柳维尔(Liouville,J.)数.

(一个无理数 β 是 Liouville 数$\Longleftrightarrow$对任一自然数 n,总存在整数 p,q,使 $0<\left|\beta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^n}$.事实上,当 p,q 为整数且 q 充分大时,$\left|\pi-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{q^{14.65}}$).

π 中的有趣数字现象是在人们计算出 π 的小数点后成千上亿位后发现的,比如:

在 π 的小数点后 71 050 位时出现 3 333 333(七个 3),且在 3 204 765 位时又一次再现;

在 π 的小数点后 17 387 594 880 位时出现 0 123 456 789(0～9 十个数字依次出现),且于第 42 321 758 803 位出现这些数字的倒序 0 987 654 321.

在π的小数点1 000万位中314 159这六个数字至少出现过6次(依次连续出现).

又如从π的整数位上的3开始到某位数字为止所组成的整数是素数的有:

3,31,314 159,31 415 926 535 897 932 384 626 433 832 795 028 841等.

当然,人们还从π的计算结果中发现了其他许多有趣的数字现象,这里不谈了.

附注 π是无理数(无限而不循环)这是一个高中生的常识,可我们的某些报刊编辑的数学水平令人不敢恭维,请看下面两则文摘:

一少年发现圆周率可以除尽

圆周率是永远除不尽的无理数,这似乎是颠扑不破的"真理",但是,最近被一位少年打破了.

去年6月,刚刚高中毕业的加拿大少年伯熙瓦在因特网上,以二进位算法,计算出圆周除以直径的圆周率第五兆位的小数是零,如果按十进位算法,则第一兆二千五百亿位是零,也就是说,圆周率是可以除尽的有理数.

去年9月,法国人贝拉尔曾创下了圆周率计算到第一兆位小数的世界纪录,伯熙瓦不仅打破了这个纪录,而且也打破了圆周率是除不尽的无理数的"真理".

(摘自5月29日《金陵晚报》)《今晚报》 1999年6月5日

圆周率π可以除尽

据《科技信息快报》报道 千百年来,圆周率3.1415926…是永远除不尽的无理数,这似乎是颠扑不破的"真理".但是,最近被一位少年打破了.

今年6月,刚刚高中毕业、年仅17岁的加拿大少年伯熙瓦,在因特网上,运用电子邮件与世界上25台电脑连接,以二进位算法,计算出圆周除以直径的圆周率第5兆位的小数是零,如果按十进位算法,则第1兆2千5

百亿位数是零,也就是说,圆周率是可以除尽的有理数.

去年9月,法国人贝拉尔曾创下了把圆周率计算至第1兆位小数的世界纪录,伯熙瓦不仅打破了这个纪录,而且也打破了圆周率是除不尽的无理数的"真理",一位渥太华科学家说,如果用人脑计算,一秒钟算一个小数点的话,需要30万年时间才能像伯熙瓦那样把圆周率除尽.(王春香摘)

《天津日报》 1999年12月10日

3.数 e

纳皮尔对数表

三四百年前,计算工具的发明与使用一直是困惑着人们的难题:在某些工程技术、科学实验及商业活动中的相对复杂计算(特别是乘、除、开方等),人们往往只能凭手脑(仅用纸和笔)或借助极简单的计算工具(如算盘、算筹等)去完成.

将数的"乘、除"运算化为"加、减"运算的想法,显然是计算史上的一次革命,这一飞跃由于"对数"的出现而成为现实.对此,法国数学家拉普拉斯曾高兴地说:"……对数的发现,等于将人们寿命延长了两倍."

1614年,苏格兰人纳皮尔(Napier,J.)所著《论述对数的奇迹》一书向世人推介他的"对数"发明.10年后,他给出了载有3×10^5个数的常用对数表(此前,瑞士人比尔奇也给出了一份对数表,只是两人的算法稍异).

在编制对数表过程中,一个重要的技术难题是:如何选取对数的底可使表的编制相对容易?纳皮尔发现:

相邻真数之差当对数的底a愈接近1时愈小.

比如,对于$\log_a N$来讲,当$a=1.000\ 1^{10\,000}$时可有下表:

N	$\log_a N$	N	$\log_a N$
1.000 000	0.000 0	1.000 900	0.000 9
1.000 100	0.000 1	1.001 000	0.001 0
1.000 200	0.000 2	1.001 100	0.001 1
1.000 300	0.000 3	……	……
1.000 400	0.000 4	1.005 012	0.005 0
……	……	……	……

表中真数按公比 $q = 1.000\ 1$ 的等比数列增长，而对数则按公差 $d = 0.000\ 1$ 的等差数列增长.纳皮尔正是选取以 $a = 1.000\ 000\ 01^{100\ 000\ 000}$ 为底开始他的对数表的编造的.历经 20 年艰辛，终于完成了他的宏愿——编制 14 位正弦对数表.有了它，人们的某些计算变得相对容易了.

请注意：这里 $a = \left(1 + \frac{1}{10^8}\right)^{10^8}$，即 a 有 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的形式.

复利问题

可自动转存的存款计息问题，称为夏利问题.比如 p_0 为本金，年利率为 r，则 n 年后的本息为

$$p_n = p_0(1 + r)^n.$$

如果计息间隔缩短，比如把年息改为 m 段计，每段利率为 $\frac{r}{m}$，这样一年下来的本息为

$$p = p_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m.$$

若令 $m = nr$，即 $\frac{r}{m} = \frac{1}{n}$，则

$$p = p_0\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^r.$$

请注意，这里又一次出现了$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的式子.

重要极限

微积分的发明是数学史(也是近代科学史)上的一个重大创举，而它的产生又与极限理论的创立密切相关.在极限研究中，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

成为一个重要极限.用不太复杂的推理可以证明它的存在(即它是一个常数).此外，人们还发现：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ \cdots$$

欧拉(Euler,L.)首先注意到它是一个无限不循环小数，并率先倡用字母“e”来表示它(1727 年).

极限本身的重要性，这儿不再赘述.我们感兴趣的是该常数的本身.这一点，欧拉在《无穷分析引论》一书(1748 年)中早已有过详尽的论述.

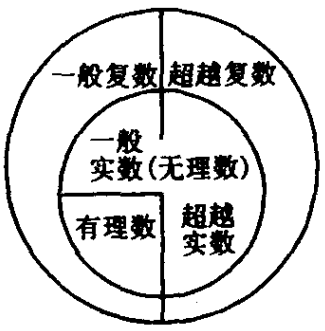
e 是超越数

人们可以通过 e 的级数表达式

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\quad(\text{规定 }0!=1)$$

去证明 e 的无理性.此外，e 又是一个超越数.

“超越数”的概念是法国数学家柳维尔(Liouville,J.)于 1844 年提出的，它是相对于“代数数”概念而出现的.所谓代数数，是指适合有理系数方程



数的分类

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0(a_n \neq 0)$$

的一类数.不是代数数的(实)数称之为超越数.

1873年,法国数学家厄尔米特(Hermite,C.)证明了 e 的超越性.这一点可参见参考文献.

自然对数

前面我们已经述及对数表的编制,以$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$形式(这里$n=10^k$)的数为底时最方便,且 n 越大编制数表越容易(这里 n 以10的方幂形式出现).而$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$,这样以 e 为底的对数便称为"自然对数",且记为"ln".人们似乎更偏好于以10为底的对数(十进制是人们熟知且天天在使用的进制),它被称为"常用对数",记为"lg".

因为对数可以换底,且 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,这样由

$$\ln 10 = \frac{\lg 10}{\lg e} = \frac{1}{\lg e} \approx \frac{1}{0.4343\cdots} \approx 2.302\,6\cdots$$

可有 $\ln x \approx 2.302\,6\lg x$,且 $\lg x \approx 0.434\,3\ln x$.

这样,就给出了两种对数间的换算公式.

欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\theta i}{n}\right)^n = e^{i\theta}$, (*)

而 $1+\frac{\theta i}{n}$的三角函数表示式为:

$$1+\frac{\theta i}{n}\sqrt{1+\frac{\theta^2}{n^2}}(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

其中辐角 $\varphi = \arctan\frac{\theta}{n}$.

又 $\left(1+\frac{\theta \mathrm{i}}{n}\right)^n = \left(\sqrt{1+\frac{\theta^2}{n^2}}\right)^n (\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$.

上式两边取极限有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\theta \mathrm{i}}{n}\right)^n = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

注意到式(*),因而有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

这便是著名的 Euler 公式(又称 de Moiver 公式).它出自前面我们曾提到过的欧拉(Euler,L.)的名著《无穷分析引论》第 8 章(其实,该公式在 1714 年就由一个叫柯特斯(Cotes,R.)的人给出过,只是形式稍有不同).

这一发现令人们感叹不已,该公式不仅将三角函数与指数函数紧密联系在一起,同时它也揭示了数学中某些分支间深奥而奇妙的联系.其中公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

将 0,1,e,π,i 数学中这五个最重要常数统一到同一式子中.

由此,人们不仅找到了三角函数的指数形式,同时还建立起新的与三角函数类似的、在工程技术上颇有用途的双曲函数:

$$\mathrm{sh}\ \theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta}), \qquad \mathrm{ch}\ \theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta})$$

$$\mathrm{th}\ \theta = \frac{\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta}}{\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}}, \qquad \mathrm{cth}\ \theta = \frac{\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}}{\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta}}.$$

它们分别叫双曲正、余弦,双曲正、余切,它们有着类似于相应三角函数的某些性质.

e 的近似计算

由微积分知识不难得到 e 的表达式(由 e^x 的麦克劳林展式

而得):

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots.$$

显然,它为我们计算 e 的(近似)值提供了方便.此外,人们还可从它的连分式求得 e 的(近似)值:

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \cdots$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

然而,计算 e 决非是件轻松的事,即便你有电子计算机帮助.

当然,e 还有其他一些数字表达式,如皮平格尔(Pippenger, N.)在[5]中给出 e 的一个表达式:

$$\frac{e}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots.$$

它的证明可见上述文献.

e 的应用

在微积分中,函数 e^x 有个绝妙的特性:其导数 $(e^x)' = e^x$,即 e^x 的导数是它自身.此外,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

等也与 e 的特性有关.

正因为此,人们发现了 e 的许多应用,比如:

(1)斯特林(Stirling, J.)公式

当 n 很大时计算 $n!$ 是件繁事,但斯特林给出 $n!$ 的近似

表达式：

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

可将上述难题化解.注意,公式中既有 e,还有 π,可谓一绝.

(2)正态分布

概率论中一个重要的分布是正态分布.标准正态分布的概率密度为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

它也是 e 的指数函数形式(这儿又一次出现了 π).

(3)数的分拆

对于正整数 m 而言,将其分拆成若干个正整数后,它们的乘积最大的分拆是：

(i)$m=3k$ 时,将其拆成 k 个 3;

(ii)$m=3k+1$ 时,将其拆成 $k-1$ 个 3 和一个 4(或者两个 2);

(iii)当 $m=3k+2$ 时,将其拆成 k 个 3 和一个 2.

如果所给的数 m 和分拆成的数不一定要求整数,那么这时如何分拆才能使所拆成的诸数乘积最大?

由 $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$,等号当且仅当 $a_i=a_j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$ 时成立知,分拆的数相等时积才有可能最大.

其次,若 m 被拆成 x 等份,只须求 $y=\left(\frac{m}{x}\right)^x$ 的极大值即可(这儿 x 不一定是整数).

由 $y'=0$ 可有驻点 $x=\frac{m}{e}$,经验算后知其为极大点,此即说将 m 等分成 $\frac{m}{e}$ 份后其积最大.

(4)数列$\{\sqrt[n]{n}\}$中的最大者

在$\{\sqrt[n]{n}\}(n=1,2,3\cdots)$中利用$y=x^{\frac{1}{x}}$的极大值$y_{max}=e^{\frac{1}{e}}$(斯坦纳问题)可知$\sqrt[3]{3}$最大.

e在数学中的应用还有很多很多,这儿不再列举.此外,e在物理、生物、人口学等诸多领域亦有应用,这些学科中的许多公式中皆有e的身影,限于篇幅,不再赘述.

e与π的数字

e与π是两个貌似不相干的常数,然而人们又从$e^{i\pi}+1=0$中看到它们千丝万缕的联系,这一点在它们的数字展式中也有体现,比如π和e的数字在第13、17、18、21、34、…等数位上数字完全相同:

位　数	1	2	3	4	5…	13…	17	18…	21…	34…
π的数字	3	1	4	1	5…	9…	2	3…	6…	2…
e的数字	2	7	1	8	2…	9…	2	3…	6…	2…

进而有人猜测:π和e的十进小数数字平均每十位会发生一次重合,这是一个至今尚未被证实但也未被反例所推翻的猜想.

数字e还有许多有趣的性质,限于篇幅,这儿不多谈了.

4.欧拉常数0.577 215 6…

关于调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$的发散问题,雅谷·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)早在1689~1704年曾有多篇文章论述,我们在前面文中曾给出一个简证.然而,计算它的前n项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

并非是件易事.原因是,随着 n 的增加,和 S_n 增长很缓慢(但级数却发散),以至使人产生某些错觉.下面是一个貌似荒唐的数学故事,当然与 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 有关.

虫子爬橡皮绳

一条虫子以每秒 1 cm 的速度在一根长 1 m 的橡皮绳上从一端爬向另一端.每当虫子爬完 1 cm 橡皮绳瞬间即伸长 1 m.假定橡皮绳弹性极好(它可以任意无节制地伸长),又假设虫子"长生不老",试问:虫子能爬到绳子的另一端吗?

乍一想,这虫子似乎永远也爬不到绳子另一端,因为橡皮绳增长的速度(每秒 1 m)远大于虫子爬行的速度(每秒 1 cm).

可是经数学一计算,问题竟然不是那么回事.让我们来算算看.

首先应注意到:橡皮绳每秒钟伸长 1 m,这种伸长是均匀的.而绳子伸长时,虫子爬过的那段也随之伸长.这样:

第 1 秒末,绳子长 1 m,虫子爬 1 cm 即绳长的$\frac{1}{100}$;

第 2 秒末,绳子长 2 m,虫子在这一秒又爬了 1 cm,即绳子长的$\frac{1}{200}$(注意,此时第 1 秒钟虫子爬的长度也随之变长,且它所占绳子长的比例$\frac{1}{100}$不变);

……

类似地,虫子在第 n 秒爬了绳子长的$\frac{1}{n \times 100}$.

于是,n 秒内虫子总共爬了绳子长的

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}\cdots+\frac{1}{n\cdot 100}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

若 $S_n\geqslant 1$ 时，说明虫子已爬到绳子的另一端.

由于 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散，使 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant 100$ 是可能的.

经计算(当然不轻松)，最小的 k 值在 $2^{143}\sim 2^{144}$ 之间，单位是秒.这就是说，当 $k\geqslant 2^{144}$ 秒时，虫子已爬到绳子的另一端.你也许会问:这个结论是如何求得的？功劳当归于欧拉.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=c.$$

计算 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是困难的，原因上面已经指出:随着 n 的增加，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 增加得很慢，同时该级数本身却发散.

欧拉(Euler,L.)以其数学的敏锐和犀利的目光发现了 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 与 $\ln n$ 之间竟然有着那么密切的联系，他发现

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right]$$

存在，即它是一个常数，就是说：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 当 n 充分大时与 $\ln n$ 相当.

下面我们给出上述结论的一个证明[4].

由 e^x 的泰勒(Taylor,B.)展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

当 $0<x<1$ 时，有

$$1+x<e^x<1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

故 $\ln(1+x)<x<-\ln(1-x),\quad 0<x<1.$

令 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n}$ 分别代入上式，且两端各自分别相加、化简（注意到对数的性质）后，有

$$\ln\frac{n+1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n.$$

两边同加 $1-\ln n$ 有

$$1+\ln\frac{n+1}{2n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n<1. \qquad ①$$

令 $c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n.$

由 $c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$，知 $c_{n+1}>c_n$，即数列 $\{c_n\}$ 单增.

又由式①知 $1+\ln\frac{1}{2}<c_n<1$，即 $\{c_n\}$ 有界. 从而，序列 $\{c_n\}$ 有极限，设其为 c. 则

$$c=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right], \qquad ②$$

且 $1-\ln 2<c<1$.

这里 $c=0.577\ 215\ 6\cdots$ 称为欧拉（Euler）常数.

对于 Euler 常数，人们知道得不很多.

人们曾猜测：Euler 常数是超越数. 可时至今日人们甚至还没有证明出它是否是无理数[3].

Euler 常数的计算同样不容易，因为尚未找到有效的公式.

1878 年，亚当斯（Adams，J.C.）曾将 c 的值算到小数点后 260 位，功夫之深、毅力之强令人感叹！

电子计算机的出现，仍然未能使 c 的计算有多少进展，到 1974 年止，人们仅将 c 算至小数点后 7 000 位，是由贝耶尔（Beyer，W.A.）和华特曼（Waterman，M.S.）完成的. 显然，它未能像 π

值计算那样成功,人们利用电子计算机将 π 的值算至小数点后2061.5843 亿位(1999 年由日本数学家金田康正(Kanada)完成).这里问题的关键在于有效的算法(软件).c 的小数点后的前 100 位数字是:

0.577 215 664 901 532 860 606 512 090 087 462 431 042 159 335 939 923 598 805 767 234 884 867 726 777 664 670 936 947 063 291 746 749 5

Euler 常数的应用

如前所述,计算 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 很困难.但当 n 较大时

$$\ln n \sim \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

比如当 $n=1\,000$ 时,

$$\sum_{k=1}^{1\,000}\frac{1}{k}=7.485\,470\cdots \qquad \ln 1\,000=6.907\,755\cdots$$

两者相差 0.577 715….故 $\ln n$ 可以视为 c 的一个似近值,误差不超过 $\pm 5\times 10^{-4}$.

回到前面的问题,我们来求 k.

由上面结论我们知道:当 n 充分大时,$\ln n\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.这样,

由 $\ln n\approx 100$ 得 $n\approx e^{100}$,这里 $e=2.718\,3\cdots$,

经换算知:n 约在 $2^{143}\sim 2^{144}$ 之间,这是一个大得惊人的天文数字,可无论如何它告诉我们:虫子总可以爬到橡皮绳的另一端.

(更精细的估计:若令 $D_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ 则有 $\frac{1}{2(n+1)}<D_n-c<\frac{1}{2n}$, $n=1,2,3,\cdots$)

利用式②可以证明许多关于级数的问题,比如利用它我们

可以证明：

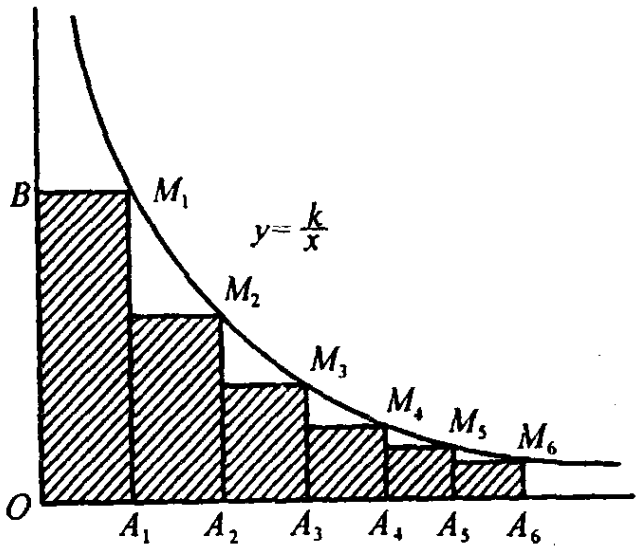
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ 的收敛区间是$[-1,1)$等等，这些这里不谈了.

利用 $\sum\frac{1}{k}$ 的发散性，雅谷·伯努利(Bernoulli, Jakob Ⅰ)曾指出：

一条双曲线与其渐近线之间的面积为无穷大.

雅谷从双曲线中心开始将其一条渐近线分成无穷多个相等的部分($A_1, A_2, \cdots$为分点)，过它们引另一渐近线的平行线分别交双曲线于 $M_1, M_2, \cdots$，再过 $M_1, M_2, \cdots$作 $A_1M_1, A_2M_2, \cdots$的垂线得一系列小矩形，这些小矩形面积分别为矩形 A_1M_1BO 面积的$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$.



由 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$发散，知上述诸矩形面积和为无穷大，

从而包含这些矩形的双曲线与其渐近线之间的面积也为无穷大.

1993 年,海格瓦利(Hegyvari,N.)曾利用 $\sum \frac{1}{k}$ 及 $\sum \frac{1}{p}$ (p 遍历全部素数)发散的事实,证明了下面的结论[2]:

十进小数 $a = 0.235\ 711\ 131\ 719\ 23\cdots$ 是无理数,这里小数点后的数字是全部素数从小到大依次排列而成.

另外,对于微积分中的所谓 Γ 函数(阶乘函数):

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

维尔斯特拉斯(Weierstrass,K.)曾给出一个著名等式:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}},$$

这里 c 即 Euler 常数.

若 $\pi_M(x)$ 为 x 以下(小于 x)的麦森质(素)数(我们后文将介绍)个数,则从概率论角度可有猜测:

$$\pi_M(x) \sim \frac{e^c}{\ln 2} \ln \ln x \quad (x \to +\infty)$$

这里 c 即为 Euler 常数,且

$$\frac{e^c}{\ln 2} \approx 2.5695\cdots$$

这一结果也令人振奋与惊叹!

5.兰德尔数、史密斯数、威廉姆斯数、……

引　子

整数运算可以产生许多有趣的现象,这也正是人们愿意继

续探讨它们的动力.下面的一此事实足以使人称奇:

$81 = (8+1)^2$;

$2\ 592 = 2^5 \cdot 9^2$;

$145 = 1!\ +4!\ +5!$;

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$;

$387\ 420\ 489 = 3^{87+420-489}$;

$36\ 363\ 636\ 364^2 = \overline{1\ 322\ 314\ 049\ 613\ 223\ 140\ 496}$;

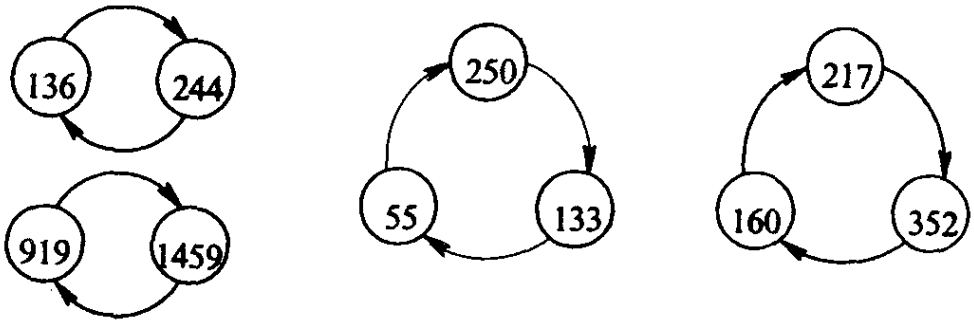
……

例子还有很多,这些形式上看上去很美的算式,说明了数字运算中蕴含着许多奥秘,揭示它们有时会有意想不到的收获.

兰德尔(Randle)数

数学家兰德尔(Randle)在阅读一本科普杂志时,被其中的一篇文章深深吸引住了,这是一篇介绍数字求立方和运算的故事,文中的主旨介绍了如下结论:

任给一个自然数 n,先求其各位数字的立方和,得到一个新数后再求新数的各位数字的立方和,……如此下去,经有限步运算后,其结果或为 1,153,370,371,407,或进入下面诸循环圈中之一:

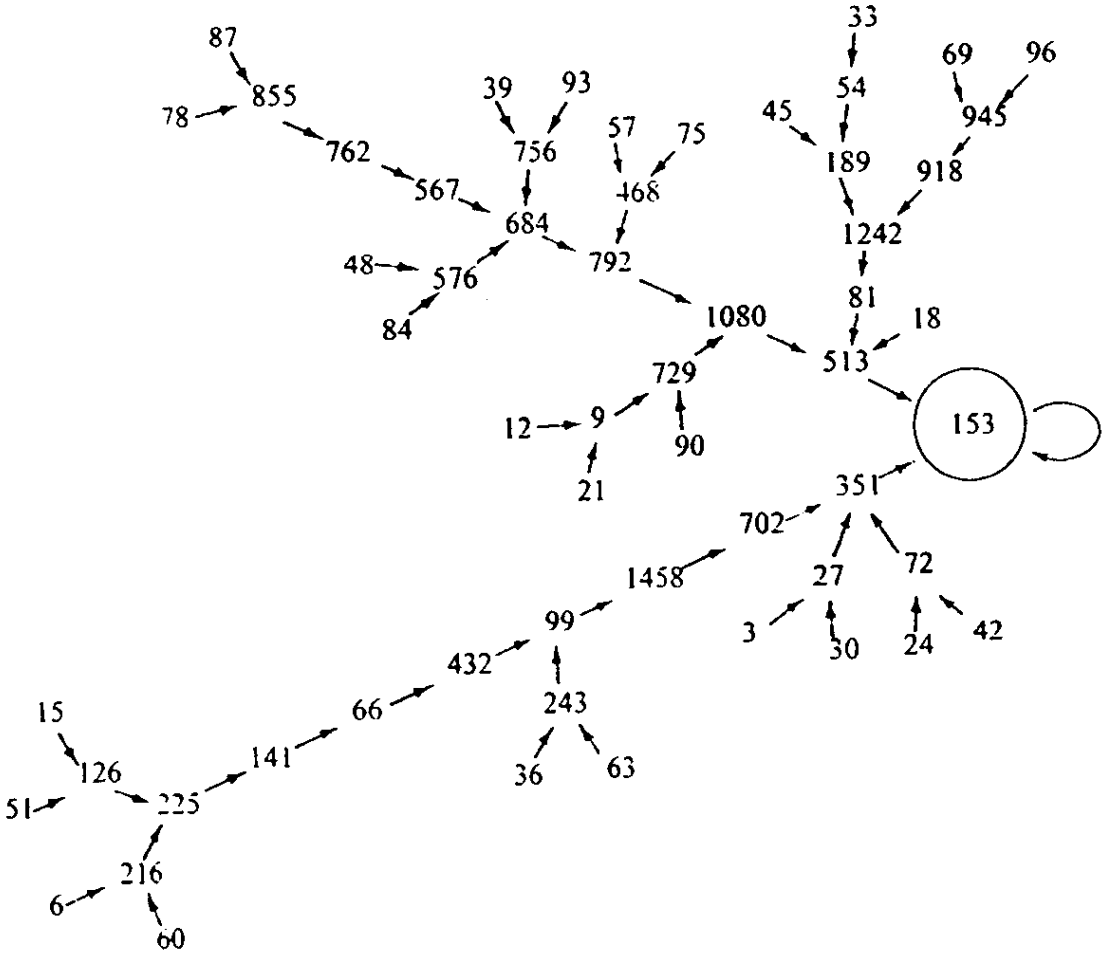


比如 432 这个数,依照上述方法运算结果依次为:

$$432 \xrightarrow{4^3+3^3+2^3} 99 \xrightarrow{9^3+9^3} 1458 \xrightarrow{1^3+4^3+5^3+8^3} 702 \xrightarrow{7^3+0^3+2^3}$$

$$351 \xrightarrow{3^3+5^3+1^3} 153 \xrightarrow{1^3+5^3+3^3} 153 \longrightarrow \cdots$$

所有3的倍数的终点都是153,部分数字的运算过程如图所示:



看到这儿他首先想到:153,370,371,407是四个极有个性的数,请注意:

$$1^3+5^3+3^3=153,\quad 3^3+7^3+0^3=370,$$

$$3^3+7^3+1^3=371,\quad 4^3+0^3+7^3=407.$$

的确,这四个数有着"内在的美",难怪人们称它们为"水仙花数".

看到这儿,兰德尔打开电脑编了一个小小程序,机器很快投入运算,不久打印机打印出下面结果:

$$1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 = 1\ 634,$$
$$8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 = 8\ 208,$$
$$9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4 = 9\ 474.$$

兰德尔兴奋不已,他调整一个程序,不久计算机又打印出下面的结果:

$$5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5 = 54\ 748,$$
$$9^5 + 2^5 + 7^5 + 2^5 + 7^5 = 92\ 727,$$
$$9^5 + 3^5 + 0^5 + 8^5 + 4^5 = 93\ 084.$$

之后,兰德尔还找到了:

$$5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6 = 548\ 834.$$

您看出点门道了吗?这种数的特点是:它有 n 位,且每位数字的 n 次方幂和仍为该数.用数学符号可表示为:

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = a_1{}^n + a_2{}^n + a_3{}^n + \cdots + a_n{}^n \qquad (*)$$

人们也把具有上述性质的数称为 Randle 数.

七、八、九、十位的 Randle 数有下面一些:

7 ~ 10 位 Randle 数

n 的值	Randle 数
7	1 741 725　4 210 818　9 800 817　9 926 315
8	24 678 050　24 678 051　88 593 477
9	146 511 208　472 335 975　534 494 836　912 985 153
10	4 679 307 774

顺便讲一句,60 位以上的 Randle 数不存在,原因是:数字 n 次方幂和不超过 $n \cdot 9^n$,而当 $n = 61$ 时,

$$61 \cdot 9^{61} < 10^{60}.$$

此外,人们若放松某些要求,还可求出其他一些类似上述性质的数,比如:

$$4^5 + 1^5 + 5^5 + 0^5 = 4\ 150;\quad (4\ 151\ 亦然)$$
$$1^5 + 9^5 + 4^5 + 9^5 + 7^5 + 9^5 = 194\ 979;$$

又如:$1^7+4^7+4^7+5^7+9^7+9^7+2^7+9^7=14\ 459\ 929$ 等等,这些数虽不适合(*)式,但它们仍具备(*)式类似的性质(区别在于位数与幂次相等与否).

史密斯(Shmith)数

数学家们常在无意中发现一些问题.据说英国数学家哈代(Hardy,G.H.)一次去医院看望他的弟子拉马努扬(Ramanujan,S.A.)时,顺便告诉了他所乘汽车牌照号码为 1 729,拉马努扬即刻脱口道:"这是一个能用两种方法表成两数立方和的最小整数."请注意:$1\ 729=1^3+12^3=9^3+10^3$.

几年前,美国一位叫威兰斯基(Welauski,A.)的数学家在与其姐夫史密斯(Shmith,A.W.)打电话,对方告诉他的电话号码是 4 937 775.

威兰斯基为了记忆方便试图寻找该数的"奥秘".他先将该数分解:

$$4\ 937\ 775=3\times5\times5\times65\ 837.$$

尔后他又发现,等式两边数的数字和相等:

$$4+9+3+7+7+7+5=42,$$

$$3+5+5+6+5+8+3+7=42.$$

于是,他便将各位数字和恰好等于它的全部真因子(非平凡)的各位数字和的整数称为 Shmith 数.

最小的 Shmith 数是 4,接下去的 Shmith 数是 22,27,58,85,94,….

在 $0\sim10^4$ 之间,人们找到 376 个 Shmith 数;

在 $0\sim10^5$ 之间,Shmith 数有 3 300 个.

美国圣路易斯的密苏里大学的麦克唐纳(McDonald,W.)证明:Shmith 数有无穷多个.

有人还发现了能产生 Shmith 数的数字模式,但它不能给出全部 Shmith 数.

利用人们已知的大素数,有人求出一个 250 多万位的 Shmith 数.

如果把 1 也算成因子,这种 Shmith 数称为广义的.比如:6 有因子 1、2、3,而 6 = 1 + 2 + 3,它是一个广义 Shmith 数.33 有因子 1、3、11,由于

$$3 + 3 = 1 + 3 + 1 + 1,$$

则它也是广义 Shmith 数.下表给出 1 ~ 8 000间的广义 Shmith 数:

1 ~ 8 000 内的广义 Shmith 数

6	33	87	249	303	519	573	681
843	951	1 059	1 329	1 383	1 923	1 977	2 463
2 733	2 789	2 949	3 057	3 273	3 327	3 547	3 651
3 867	3 921	4 083	4 353	4 677	5 163	5 433	5 703
5 919	6 081	6 243	6 297	6 621	6 891	7 053	7 323
7 377	7 647	7 971					

Shmith 数还有许多性质待人发现,它的用途也许会在不远的将来找到.

威廉姆斯(Williams)数

记 n 个 1 组成的自然数为 $I_n = \underbrace{111\cdots11}_{n个}$,其中 I_n 为素(质)数者称为威廉姆斯(Williams)又称黎普奈特(Repunit)数.

容易证明,当 n 是合数时,I_n 必为合数.

然而 n 为素数时,I_n 则未必是素数.

起初人们仅发现 I_2,I_{19},I_{23} 是素数,大约五十年后,美国 Monitoba 大学的威廉姆斯(Williams)证明 I_{317} 也是素数,这是当时

发现的最大的 I_n 型素数.

1986 年,美国人杜布奈尔(Dubner)证明了 I_{1031} 是素数,同时他宣称:

在 $1 \sim 10^6$ 内除 I_2, I_{19}, I_{23}, I_{317} 和 I_{1031} 外再无其他 Williams 数.

顺便讲一句,当 n 为某些素数时,尽管人们已证得 I_n 是合数,但其因子分解工作却远未完成.

1971 年,布利哈特(Bulihat)完成了 I_{31}, I_{37}, I_{41} 和 I_{43} 的因子分解:

1984 年,戴维斯(Davis, M.)完成了 I_{71} 的因子分解(它有两个因子,一个 30 位,一个 41 位).

更大的 Williams 数人们正在探求中,正如人们在寻找更大的麦森素数一样.

顺便讲一句波黎各大学的奥尔蒂尔(Oltikar, S.)和韦兰德(Way land, K.)利用 Williams 数给出一个大 Shmith 数:$2 \cdot 10^{45} I_{317}$(它有 360 位以上).亚泰斯(Yates)又给出:

$$10^{39\,133\,210} I_{1031} (10^{4\,594} + 3 \cdot 10^{2\,297} + 1)^{1\,476}$$

它有 10 694 985 位以上,这是迄今为止人们发现的最大 Shmith 数.

卡密切尔(Carmichael)数

1640 年,法国业余数学家费尔马(Fermat, P. de)给出定理:

若 p 为素数,且 $(a, p) = 1$,则 $p \mid (a^{p-1} - 1)$.此又称费尔马小定理.但它的逆命题却不真.1819 年,法国人萨鲁斯(Sarrus)发现:

$a = 2$, $n = 341$ 时,由于 $(2^{10} - 1) \mid (2^{340} - 1)$,

又 $2^{10} - 1 = 1023 = 341 \times 3$,从而 $341 \mid (2^{340} - 1)$.

但 $341 = 11 \times 31$ 是合数.这类数人称 Sarrus 数.

1909 年,美国数学家卡密切尔(Carmichael,R.D.)又发现了这样一类数:

如 561 是合数,但当 a 不为 3,11,17 及它们的倍数时,$561 \mid (a^{560} - 1)$.

例如:561 可整除 $2^{560} - 1, 4^{560} - 1, 5^{560} - 1, \cdots$.

人们称这样的数为 Carmichael 数(又如 1729 也是一个 Carmichael 数).

Sarrus 数又称"伪素数",而 561,1 729 也是伪素数.

人们已经证明:伪素数有无穷多个.

1950 年,人们还发现了最小的偶伪素数 161 038.

一年后,毕格尔(Beeger)证明:存在无穷多个偶伪素数.

伪素数和 Carmichael 数在寻找大素数中甚为有用.

卡布列克(Kaprekar)数

印度数学家卡布列克(Kaprekar,D.P.)曾以发现下面结论而闻名:

任给一个四位数(它的各位数字不全一样),你只须反复遵循下面运算:先将它的数字依从大到小排序重新组成一个新的四位数,然后用它减去它的倒序,经有限步骤后结果必为 6 174.

比如 2 126 经过上述运算结果依次为:

$$2\,126 \xrightarrow[4\,995]{\begin{matrix}6\,221\\-1\,226\end{matrix}} \xrightarrow[5\,355]{\begin{matrix}9\,954\\-4\,599\end{matrix}} \xrightarrow[1\,998]{\begin{matrix}5\,553\\-3\,555\end{matrix}} \xrightarrow[8\,082]{\begin{matrix}9\,981\\-1\,899\end{matrix}} \xrightarrow[8\,532]{\begin{matrix}8\,820\\-0\,288\end{matrix}} \xrightarrow[6\,174]{\begin{matrix}8\,532\\-2\,358\end{matrix}}$$

若 6 174 再重复上述运算结果仍是 6 174.

一次卡布列克乘火车外出,途中遭遇暴雨,因铁路信号中断,火车只得停在前不着村后不着店的途中.

天一放晴旅客们纷纷下车透透空气,卡布列克也随人流走出车厢.

一下车他便瞥见不远竖着一块已从中断裂的里程牌(他想确定一下火车停车的位置):

$$\boxed{30}\ \boxed{25}$$

一开始他并没介意,继而一想:不仅此数奥妙,且里程牌断裂的也奇巧,请注意:

$$(30+25)^2=55^2=\underline{30}\ \underline{25}$$

有无其他类似性质的自然数存在?卡布列克一边想、一边自语道.

人们把具有上述性质的数 55 称为"卡布列克数",同时人们还发现:四位以下的卡布列克数有 18 个,比如:

$$297:297^2=\underline{88}\ \underline{209}=(88+209)^2$$

$$703:703^2=\underline{494}\ \underline{209}=(494+209)^2$$

$$999:999^2=\underline{998}\ \underline{001}=(998+001)^2$$

罕特尔(Hunter,J.A.H.)考察了 1 ~ 9999 之间的自然数发现了 18 个卡布列克数.

1 234 567 900 987 654 321 是一个 19 位的卡布列克数,注意到:

$$123\ 456\ 790+0\ 987\ 654\ 321=1\ 111\ 111\ 111,$$

$$1\ 111\ 111\ 111^2=1\ 234\ 567\ 900\ 987\ 654\ 321.$$

日本的一位数学家广濑昌一曾找到一个 100 位的卡布列克数,它是截至目前人们发现的最有意思的卡布列克数:

669 421 487 603 305 785 123 966 942 148 760

3 305 785 123 966 942 014 876 033 057 851 239 669

421 487 603 305 785 123 966 942 148 761

它是$\underbrace{1818\cdots1818}_{25个18}^{2}$，当然，寻找这样大的卡布列克数往往要借助于电子计算机的帮助(也要依据某些方法).

此外，人们还将这种数作了推广，比如：

$$4\ 949^3 = \underline{121}\ \underline{2}\ \underline{1\ 388}\ \underline{2\ 349} = (1\ 212 + 1\ 388 + 2\ 349)^3$$

$$67^4 = \underline{20}\ \underline{15}\ \underline{11}\ \underline{21} = (20 + 15 + 11 + 21)^4$$

等等.

如果你有兴趣请你验算一下：22 222 和 1 111 111 111 也是两个(普通)卡布列克数.

6.几种剖分数与组合数

在初等数学中，人们研究了许多剖分问题，其中有些是重要的——因为由它们往往可以引出数学中的许多话题.这儿列举几个.

平面剖分空间

这是著名数学家波利亚(Polya,G.)十分欣赏的一个问题.

斯坦纳在他的论文《关于划分平面和空间的几个法则》一文提出的：

n 个平面最多可将整个空间剖分成多少部分?

斯坦纳原本知道了命题的低维结论：

直线段上的 n 个点至多可将它分成 $n+1$ 个部分.

于是他便将问题稍作推广(先由不完全归纳法归纳)可有：

平面上的 n 条直线至多可将平面分成 $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ 个部分.

这个结论不难用数学归纳法证明.今用 S_n 表示 n 条直线剖分平面的最多部分数;用 V_n 表示 n 个平面剖分空间的最多部分数.斯坦纳设为:

$$V_{n+1} = V_n + S_n. \tag{1}$$

他是这样分析的:

设 n 张平面将空间最多分成 V_n 部分.再添一张平面,则它与原来 n 张平面有 n 条交线,其中无三条直线共点,也无两直线平行.

因而这新添的平面被这 n 条直线剖分成 S_n 部分,该平面上这 S_n 部分中每一部分都将前面空间中 V_n 部分的每部分一分为二.这说明(1)式成立.

由于已知 $S_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$,则在(1)式中依次令 $n = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 后,式两边分别相加有:

$$V_n = 2 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1}.$$

由(1)有 $V_n = n + 1 + \frac{1}{2}[1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n-1)]$,

注意到 $n(n+1) = n^2 + n$, 则

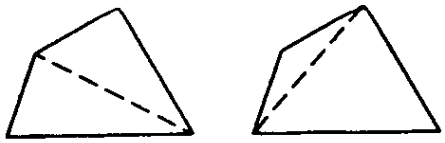
$$\begin{aligned} V_n &= n + 1 + \frac{1}{2}\{[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + [1 + 2 + \cdots + (n-1)]\} \\ &= \frac{n^3 + 5n + 6}{6}. \end{aligned} \tag{2}$$

多边形剖分

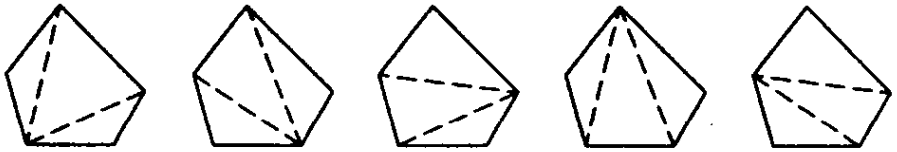
1751 年欧拉(Euler, L.)写信给哥德巴赫(Goldbach, C.)(两人经常通信讨论一些问题),信中提到:

可以有多少种方法用对角线把一个 $n(n \geqslant 3)$ 边形(平面凸

的)全部剖分成三角形?



$n=4$



$n=5$

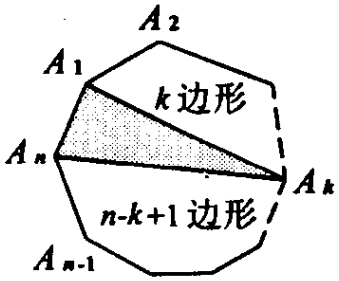
欧拉起初得到七个剖分数(下用 E_n 表示):

$E_3=1$, $E_4=2$, $E_5=5$, $E_6=14$, $E_7=42$, $E_8=132$, $E_9=429$.

欧拉又将此结果告诉了西格纳(Segner),1758 年西格纳给了计算 E_n 的第一个递推公式:

$$E_n=E_2E_{n-1}+E_3E_{n-2}+\cdots+E_{n-1}E_2 \tag{3}$$

这里规定 $E_2=1$.他也是用归纳法完成的.



设 $A_1A_2\cdots A_n$ 为一个 n 边形,以 A_k 为顶点作 $\triangle A_1A_kA_n$,同时将多边形剖成两个多边形,一个 k 边形,一个 $n-k+1$ 边形.

这样 k 边形再剖分有 E_k 种方案;而 $n-k+1$ 边形有 E_{n-k+1} 种方案.

这是对顶点 k 而言的.由于顶点 A_k 可是 A_2、A_2、A_3、…、A_{n-1} 之一,(即 $2\leqslant k\leqslant n-1$),这样

$$E_n=E_2E_{n-1}+E_3E_{n-2}+\cdots+E_{n-1}E_2.$$

后来,欧拉本人推导出一个公式:

$$E_n = \frac{(4n-10)!!}{(n-1)!} \tag{4}$$

1941 年乌尔班(Urban, H.)又给出一个公式.(递推公式):

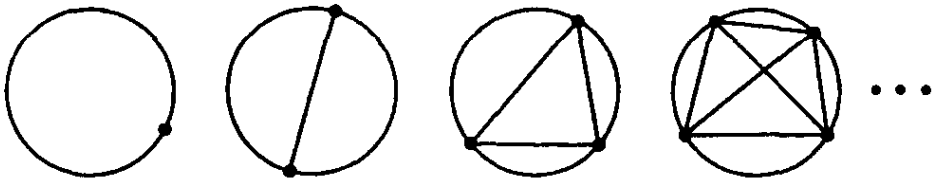
$$E_n = \frac{4n-10}{n-1} E_{n-1}. \tag{5}$$

且由此推导出欧拉本人给出的公式(4).

我们还想指出:数 E_n 还与卡塔兰(Catalan)数 C_n 有关($E_n = C_{n-1}$,稍后我们将介绍).

弦分圆区域数

圆周上有 n 个点,两两连弦,其中任何三条弦在圆内均不共点,则由它们确定的圆内互不重叠的不同区域数若记为 R_n,则由下图可见:



$R_1 = 1$　　$R_2 = 2$　　$R_3 = 4$　　$R_4 = 8$　　…

$R_1 = 1$,　$R_2 = 2$,　$R_3 = 4$,　$R_4 = 8$,　$R_5 = 16$,　…

于是人们猜想　$R_n = 2^{n-1}(n \geqslant 1)$.

但是实际情况是　$R_6 = 31$.

对于平面情形,由欧拉公式知:$F + V - E = 1$.

从而　$F = E - V + 1$.　　(*)

显然所求区域数 R_n 是 F,顶点数 V 恰好是圆上点数 n 及诸弦在圆内交点数和,E 是圆弧(n 段)及圆内弦交点所界定的弦段条数和,这样有(注意(*)式):

$$R_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4},$$

它其实是 $2^{n-1}=(1+1)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$ 的展开式前 5 项之和.

这样 $R_n=2^{n-1}$ 仅当 $1\leqslant n\leqslant 5$ 时才真.

不过,这个 $R_n=\sum_{k=0}^{4}\binom{n-1}{k}$ 可由杨辉三角形(即帕斯卡三角形)直接求得(计算每行左五项):

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

……

卡塔兰(Catalan)数

法国数学家罗德里古斯(Rodrigues, E.)在研究欧拉剖分数 E_n 时,曾将其与另一位法国数学家卡塔兰(Catalan, E.C.)研究的另一类问题联系起来,卡塔兰问题是这样的(1838 年提出):

成对地计算 n 个不同因子的乘积(各因子次序不变),一共有多少种方法?

设因子分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,易看出:

$C_1=1$,即 a_1 本身无乘法可做;

$C_2=1$,即 $a_1\cdot a_2$;

$C_3=2$,即$(a_1\cdot a_2)\cdot a_3, a_1\cdot(a_2\cdot a_3)$

$C_4=5$,即$[(a_1\cdot a_2)\cdot a_3]\cdot a_4, [a_1\cdot(a_2\cdot a_3)]\cdot a_4, (a_1\cdot a_2)\cdot(a_3\cdot a_4), a_1\cdot[(a_2\cdot a_3)\cdot a_4], a_1\cdot[a_2(a_3\cdot a_4)]$

……

我们仍用归纳法稍作分析.

设 n 个因子已按某些顺序安排好.

令最后一次乘法乘号前有 k 个因子,乘号后有 $n-k$ 个因子.

前面因子做乘法(规定的乘法!)方式有 C_k 种,后面因子做乘法方式有 C_{n-k}种.这次乘法共有 C_kC_{n-k}种.

由于 k 可取 1 到 $n-1$,这样:

$$C_n=C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots+C_{n-1}C_1, \tag{6}$$

这里规定 $C_1=1$.

罗式由(6)式与(3)式对照还得到(可用数学归纳法证)

$$E_n=C_{n-1}. \tag{7}$$

卡塔兰数还有其他产生背景,比如:

①圆周上有 $2(n-1)$个点,将它们两两连弦,问诸弦不相交的连弦方式有多少种?

②$2(n-1)$个相异实数均分成两组(每组 $n-1$ 个):

$$\{a_1,a_2\cdots,a_{n-1}\}\text{和}\{b_1,b_2,\cdots b_{n-1}\}$$

这里 $a_i<b_i(i=1,2,\cdots,n-1)$.求此种分拆方式数?

斯特林(Stirling)数

我们知道二项式$(a+b)^n$ 属系数,当 $n=0,1,2,\cdots$时,可得

所谓杨辉(帕斯卡)三角:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\cdots\cdots & & & & & & & & & & & & \cdots\cdots
\end{array}
$$

它的许多奇妙性质,这儿不赘述了.与之相仿的人们又定义了斯特林(Stirling)数.

斯特林(Stirling,J.),1695 年生于苏格兰,曾在牛津大学学习,后任法国数学教授,1726 年后返回英国,且从事数学研究工作.他曾给出过估算 $n!$ 的著名公式:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

他在多项式研究中提出两类数.

命$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$按 x 升幂展开,其系数称为第一类 Stirling 数:

$$[x]_n = S(n,0) + S(n,1)x + S(n,2)x^2 + \cdots + S(n,n)x^n.$$

利用关系式 $S(0,0)=0, S(n,n)=1$ 和 $S(n+1,k) = S(n,k-1) - nS(n,k)$可递归地求下 $S(n,k)$:

第一类 Stirling 数 $S(n,k)$

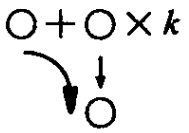
n \ k	0	1	2	3	4	5	…
1	0	1	0	0	0	0	…
2	0	-1	1	0	0	0	…
3	0	2	-3	1	0	0	…
4	0	-6	11	-6	1	0	…
5	0	24	-50	35	-10	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

同时用 $x^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)[x]_k, n=0,1,2,\cdots$ 定义了第 2 类 Stirling 数 $S(n,k)$，它满足递推关系.

$$S(n+1,k)=kS(n,k)+S(n,k-1),1\leqslant k\leqslant n.$$

第二类 Stirling 数 $S(n,k)$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	…
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	



Stirling 数有许多有趣性质，比如它与范德蒙(Vandermonde, T.)行列式就有联系：

第 1 类 Stirling 数不计符号的话 $S(n+1,k)$ 的值等于矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots 1\\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots 2^n\\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots 3^n\\ \cdots\cdots & & & \\ 1 & n & n^2 & \cdots n^n\end{pmatrix}_{n\times(n+1)}$$

删去第 k 列后的行列式值除以 $(n-1)!\cdot(n-2)!\cdots 2!\cdot 1!$ 的商.

第 2 类 Stirling 数 $S(n,k)$ 的值为

$$\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots 2^{k-3} & 2^{k-2} & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots 3^{k-3} & 3^{k-2} & 3^n \\ \cdots\cdots & & & & & \\ 1 & k & k^2 & \cdots k^{k-3} & k^{k-2} & k^n \end{vmatrix}.$$

此外对第 1 类 Stirling 数而言，

$$\begin{vmatrix} S(n+1,1) & S(n+1,2) & \cdots & S(n+1,k) \\ S(n+2,1) & S(n+2,2) & \cdots & S(n+2,k) \\ \cdots\cdots & & & \\ S(n+k,1) & S(n+k,2) & \cdots & S(n+k,k) \end{vmatrix} = (n!)^k.$$

两类 Stirling 数还有如下矩阵与递矩阵关系式：

$S(n,k)$的无穷下三角阵是 $S(n,k)$矩阵的递：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ 2 & -3 & 1 & & \\ -6 & 11 & -6 & 1 & \\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1 \\ \cdots\cdots & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & \\ 1 & 7 & 6 & 1 & \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\ \cdots\cdots & & & & \end{pmatrix}^{-1}$$

再如第 2 类 Stirling 数可表示复数积分式：

$$S(n,k) = \frac{1}{2\pi i}\frac{n!}{k!}\oint_c \frac{(e^x-1)^k}{x^{n+1}}dx, (n,k=0,1,2\cdots)$$

这里 c 为复平面上沿逆时针方向绕原点的任一简单闭曲线.

另外，第 2 类 Stirling 数与划分问题有关：

n 个元素的集合划分为 k 类的划分数即为 $S(n,k)$.

贝尔(Bell)数

1934 年，苏格兰出生的美国数学家贝尔(Bell, E.T.)曾考虑

过下面的组合问题：

n 个元素(彼此无区别)分成 n 组，每组元素数目不限(从 0 到 n)，问有多少种分法？

由此产生的数，贝尔首先深入研究它且指出它的重要，人们称之为 Bell 数，常记 B_n.

若命 $B_0 = 1$，则前 13 个 Bell 数是：

1,1,2,5,15,52,203,877,4 140,21 147,115 975,678 570,4 213 597.

杜宾斯基(Dobinski,G.)曾给出 Bell 数一个计算公式：

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

此外，还有递推关系式：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k B_k .$$

但公式使用是很困难的，且 B_n 随 n 的增大增长极快，B_{99} 已是 116 位数了.

贝尔本人发现了 B_n 的许多有趣性质，比如：

①B_n 是 $\mathrm{Exp}\{e^t - 1\}$(这里 $\mathrm{Exp}\{f(x)\}$ 表示 $e^{f(x)}$)的泰勒(Tayloy)级数的系数：

$$\mathrm{Exp}\{e^t - 1\} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

②将 $B_0 \sim B_{2n}$ 组成下面行列式：

$$\begin{vmatrix} B_0 & B_1 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_0 & B_1 & B_2 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_{n+1} \\ B_2 & B_3 & B_4 & \cdots & B_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_n & B_{n+1} & B_{n+2} & \cdots & B_{2n} \end{vmatrix}$$

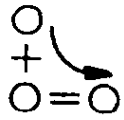
则它们的值依次为：

$1!, 1!\cdot 2!, 1!\cdot 2!\cdot 3! \cdots, 1!\cdot 2! \cdots\cdots \cdot n!$

③B_n 与第 2 类 Stirling 数有关系式：

$$B_n = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

为了方便地写出 B_n 来，人们发明了 Bell 数三角形.



1

1 2

2 3 5

5 7 10 15

15 20 27 37 52

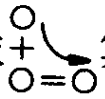
52 67 87 114 151 203

203 255 322 409 523 674 877

877 … … … … … …

……

第 1 是 1；

第 2 行第一个数也是 1，第 2 个数依  算法（规则）可求得它为 2；

第 3 行首数为第 2 行尾数，第 2,3,4 个数依上面规则算出；

以后每行首数为上一行尾数，其他数依上面规则算出.

则数字三角的第 1 列给出相继 Bell 数 B_n.

错 位 问 题

伯努利家族几世出了众多知名数学家.雅各布·伯努利（Bernoulli，Jakob Ⅰ）的侄子丹尼尔.伯努利（Bernoulli，Danile Ⅰ）曾考虑过这样一个问题：

求 n 个元素的排列,使其中无一个元素处于它应当占有的位置.

尔后,欧拉(Euler,L.)也开始研究这个问题,且怀着极大兴趣,称之为"组合理论的一个妙题".

这个问题也常被形象地描述为"装错信封问题":

某人写了 n 封信及相应信封,求所有信纸装错信封的种类数.

设信纸 $a,b,c,\cdots$ 对应的信封为 $A,B,C,\cdots$,且用 D_n 表示 n 封信错装的种类数.

可用归纳法推导该问题.先将问题化为:

①a 装进 B,b 装进 A;

②a 装进 B,b 没有装进 A,

两种情形.可得出:

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}),\quad n\geqslant 3.$$

由此可有

$$D_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n_1}\right]$$

此外也可由递推式 $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n(n\geqslant 2)$导出上式.

问题稍稍引申,我们可以求出 n 封信全部装错信封的概率(不看信封地址随机地抽取)为

$$P=\frac{D_n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\approx\frac{1}{e}=0.3678\cdots$$

另外,D_n 与组合数还有下面恒等关系:

$$n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k},\text{这里 }D_0=1.$$

斐波那契(Fibonacci)数

这是一个由意大利数学家斐波那契(Fibonacci,L.)在其出

版的《算盘书》中以生小兔为题而引发的数列：

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots$$

前文我们已经有述，它的通式可写为 $f_0=1$，$f_1=1$，$f_{n+1}=f_{k-1}+f_k(k\geqslant 1)$.

此外，它的通项表达式（比内公式）为：

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

它有许多性质和应用，比如

① $f_{n+1}=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots+\binom{n-k}{k}$，

$k=\left[\frac{n}{2}\right]$.即不超过$\frac{n}{2}$的最大整数.这里

②由$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}f_{n+1}&f_n\\f_n&f_{n-1}\end{pmatrix}$可以导出：

$$f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2=(-1)^n.$$

组合数还有许多较著名的，比如伯努利数（Bernoulli 数）、拉姆赛数（Ramsy 数）、……限于篇幅这儿不谈了.

7.数字三角形

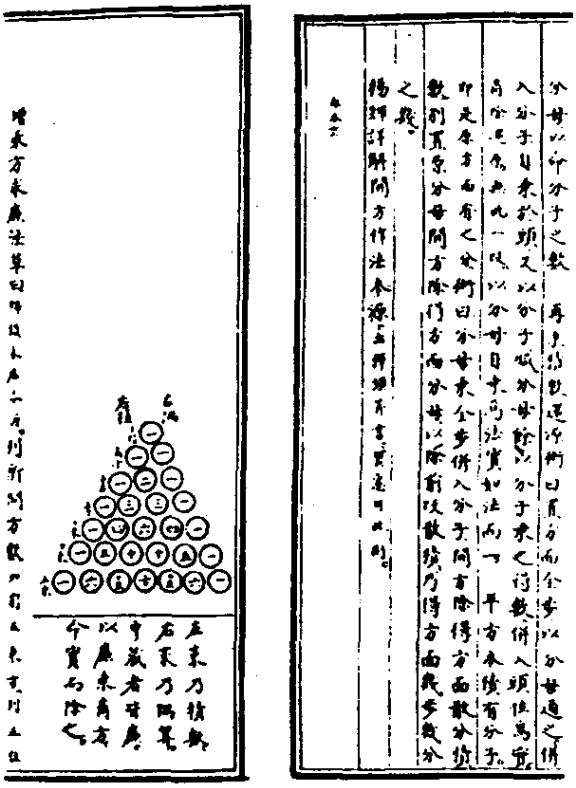
人们在数学计算中，发现了一些数字三角形，其中我们最熟悉的便是杨辉三角了.其实数字三角形还有许多，我们也曾介绍过.下面我们分别谈谈它们被发现的背景.

杨辉三角形

1261 年杨辉出版了他的《详解九章算法》,书中载录了贾宪所编《黄帝九章算法细草》部分章节,其中"开方作法本源"图,已给出如今二项式$(a+b)^n$展开式系数:

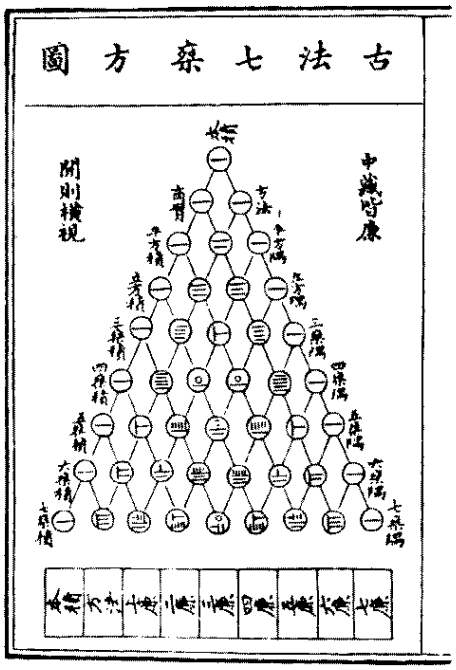
$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\multicolumn{11}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
$$

人们习惯称之为杨辉三角形(按理应称贾宪三角形).



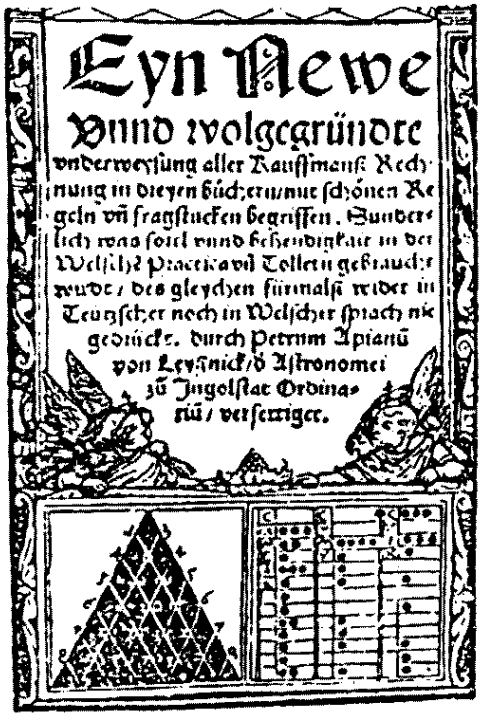
杨辉的贾宪三角形

此外我国其他算书中也有此数字三角形出现:



《四元玉鉴》中的“古法七乘方图”

国外亦有此类数字三角形出现和研究.



阿皮尔著《Rechnung》内封中的数字三角形(1527)

1781 年日本书里的贾宪三角形

国外称为帕斯卡(Pascal,B.)三角形,其实帕斯卡的发现比我国要迟几百年:

杨辉三角有许多有趣的性质,比如:

①它每行诸数和恰好依次为 $2^0,2^1,2^2,\cdots$;

②表中每数皆为其肩上两数和(除每行首尾两数外);

③表中每条斜线"/"上诸数和(自上向下)恰好为其最后一个数的左下数;……

其实,杨辉三角还有许多推广形式,比如:

1

1 1 1

1 2 3 2 1

1 3 6 7 6 3 1

1 4 10 16 19 16 10 4 1

1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1

……

系$(1+x+x^2)^n$展开式中x各方幂系数.表中除首末两数外其余各数皆为其左、上、右三数之和.

它也有许多有趣性质:

①表中每行诸数之和(自上到下)分别为 $3^0,3^1,3^2,3^3,\cdots$;

②表中每行诸数平方和,必为表中某数;

③表中第1,2,3斜行"/"诸数与杨辉三角形中三斜行无异;

……

杨辉三角还可以再推广,倘若对它作些数字变换,还可用来计算不少算式.

莱布尼兹(Leibniz)三角形

德国数学家莱布尼兹(Leibniz,G.W.)发现了下面的分数数字三角形,人称莱布尼茨三角形.

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{4}$$

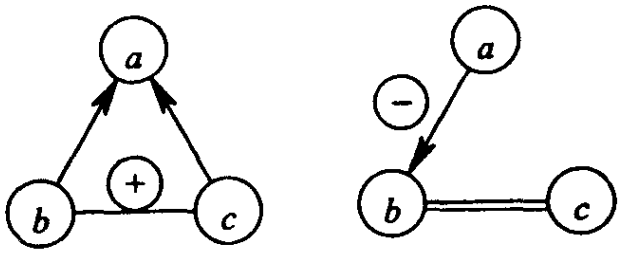
$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{7}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{140}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

该数字三角形每行首末两数依次为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$ 中间的每个数皆为其下角左右两数和:



$a=b+c$ 或 $a-b=c$

该数表也有许多有趣的性质,比如:

表中每条斜线"/"上诸数和恰为斜线顶端之数左上角的数,

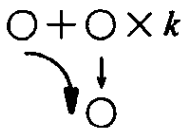
例如：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots$$

斯特林(Stirling)数三角形

我们已经指出：直接计算第 2 类斯特林数 $S(n,k)$ 比较困难，人们将它排成：



0　1

0　1　1

0　1　3　1

0　1　7　6　1

0　1　15　25　10　1

0　1　31　90　65　15　1

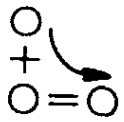
……

只须依照表左上角的计算方式，便可算得表中诸数，它们恰好是 $S(n,k)$ 其中 n 为表的行数，k 为表的列数．表中第 n 行诸数和恰好是第 n 个贝尔数 B_n．

贝尔(Bell)数三角形

我们也曾介绍过贝尔数，它除了可由上面第 2 类斯特林数三角形各行诸数之和求得外，也给出一种数表可以计算(生成)该数：

1
1 2
2 3 5
5 7 10 15
15 20 27 37 52
52 67 87 114 151 203
203 255 322 409 523 674 877
877 … … … … … … …
……



它的生成规则我们也已介绍过了.表中第 1 列恰好是贝尔数 $B_1, B_2, B_3\cdots$

法莱(Faray)分数三角形

法莱(Faray,J.)法国人,多才多艺.他提出这样一类分数:

分母不大于某个数 k 时全部既约分数生成的数列(从小到大顺序)如何求?

比如分母不大于 7 的这种分数有 17 个,它们是:

$\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7}$.

人们称之为法莱数列.人们也开始了对此种分数的研究.

首先人们关心的是:分母不大于 n 的法莱分数有多少?

想不到它竟与所谓欧拉函数 $\varphi(n)$——小于 n 且与 n 互素的整数个数——有关.

关于 $\varphi(n)$其实有公式可算,比如说:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

则 $$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(\alpha_k-1).$$

分母不大于 n 的法莱分数(下称 n 阶)的个数 N 为:

$$N=\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n),$$

由于 $\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)\approx\frac{3n^2}{\pi^2}$，故 $N\approx\frac{3n^2}{\pi^2}$.

具体数字可见下表：

n 与 $\varphi(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	25	50	100	200	300	400	500
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	8	20	20	40	80	80	160	200

N 与 $3n^2/\pi^2$

n	1	5	10	50	100	200	300	500
$N=\sum\varphi(n)-1$	0	9	31	773	3043	12231	27397	76115
$3n^2/\pi^2$	0.3	7.6	30.4	759	3039.9	12158.6	27356.8	75990.9

如何按顺序写出全部 n 阶法莱分数？

人们发现了用法莱三角形最妥.这个数字三角形是依下面规律构造的：

它每行以$\frac{0}{1}$开头、以$\frac{1}{1}$结尾(第 1 行仅此两数)；

除第 1 行外的首尾两数，皆是每个数字肩上两个分数分子之和作分子、分母之和作分母，比如可以得到三行的数字三角形：

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{1}{1}$$

据此可依图中末两行写出全部 3 阶法莱分数，即从第 2 行$\frac{0}{1}$开始依箭头顺序写至$\frac{1}{1}$即可：

$$\frac{0}{1},\quad\frac{1}{3},\quad\frac{1}{2},\quad\frac{2}{3},\quad\frac{1}{1}$$

再依它们为行依前述步骤得到：

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{1}{1}$$

这样又可产生包括全部4阶法莱分数的数贯(只须从中除去分母大于4的分数即为全部4阶法莱分数)：

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{1}$$

依此下去可得包含全部 n 阶法莱分数的数贯，只须除去其中分母大于 n 的分数，即得全部按大小顺序排列好的 n 阶法莱分数，即法莱分数贯.

将这些数贯依次排列，即得法莱分数三角形：

$$\frac{0}{1}\qquad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\qquad\frac{1}{2}\qquad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{3}\qquad\frac{1}{2}\qquad\frac{2}{3}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}\qquad\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\qquad\frac{1}{1}$$

……

表中第 n 行除去分母大于 n 的分数后便得到一个 n 阶法莱分数贯.

法莱分数贯也有许多有趣性质，比如：

①相邻两项之差为它们分母乘积的倒数；

②三相继项的中间项是以前后两项的分子之和作分子、分母之和作分母的分数.

③相邻两个法莱分数$\frac{a}{b}$,$\frac{c}{d}$满足$bc - ab = 1$.

由此可得$ax + by = 1$的至少两组解(取$\frac{a}{b}$的前或后一个法莱数,由该结论可得).

数字三角形还有许多,它们往往是为了某些计算方便,而依照一定规律产生的,由于它们生成简单、使用方便、性质奇妙而备受人们青睐.当然也有为了其他目的拟造的数字三角形,如肯内(Kenney,M.)构造的素数三角形,表中每行为整数1~K,其中K为行数.且每行任两相邻数之和皆为素数:

```
                *
              1   2
            1   2   3
          1   2   3   4
        1   4   3   2   5
      1   4   3   2   5   6
    1   4   3   2   5   6   7
  1   7   6   5   2   4   3   8
.....................................................
```

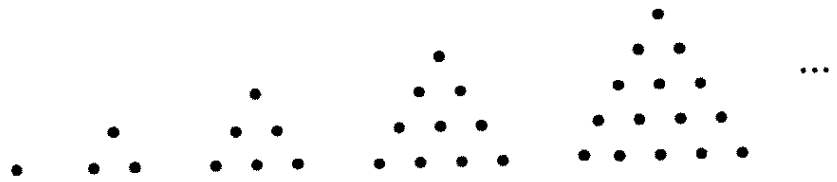

该数字三角形的性质及用途有待人们研究.

五 数学创造

1.自然数方幂和与伯努利数

小　史

两千多年前希腊数学家毕达哥拉斯(Pythagoras)在研究“形数”时已注意到了“三角形数”(排成三角形状时的点数):



1　　3　　6　　10　　15　　…

它们实际上涉及了 $1+2+3+4+\cdots+n$ 这类(从1开始的)相继自然数和的问题(注意:相邻两个“三角形数”和恰好是一个“正方形数”即完全平方数,这个结论为我们提供了计算这类数和的一种方法).

阿基米德(Archimedes)在计算抛物线图形面积时,已经求得自然数平方和公式:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

古希腊另一位数学家尼科梅切斯(Nichomachus)则给出了(印度人阿耶波多(Āryabhata)的著作中也给出了该公式):

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2.$$

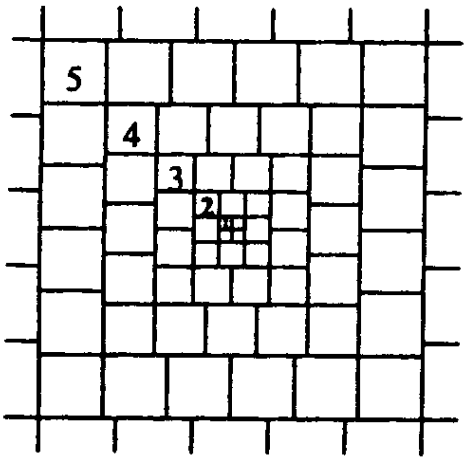


图 1

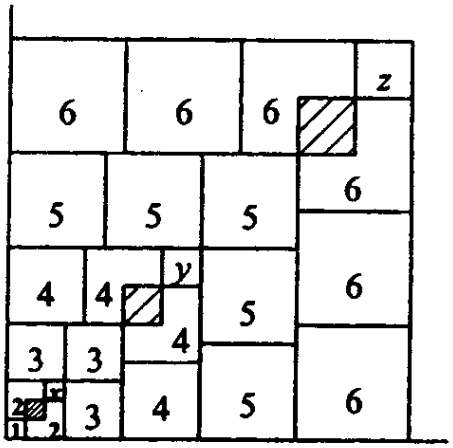


图 2

从上面两图用不同方法计算它们的面积(注意图 2 中的 x, y, z 与其相邻的带阴影部分图形相抵)可给出上述公式的两种几何解释[10].

然而,上述公式的严格证明则是 1834 年由雅谷比(Jacobi, C.G.J.)完成的.

四次方和公式给出大约一千年后(11 世纪)阿拉伯数学家阿里·花拉子米(al - Khwarizmi)给出:

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

对于一般自然数方幂和 $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ 的公式研究,则是近几百年才有了进展.

13 世纪我国数学家朱世杰在其所著《四元玉鑑》中发明了"垛积术"和"招差术",用以研究高阶等差级数求和问题,他给出了公式(用今天的数学符号表示):

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p).$$

用它可以计算诸如：

$1+2+3+\cdots+n$，　$1+3+6+10+\cdots$，

$1+4+10+20+\cdots$，　$1+5+15+\cdots$，

$1+6+21+\cdots$，　……

等所谓三角垛数和问题.

此外，他还给出公式(用今天数学符号表示)：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)\cdots(r+p-1)r$$

$$=\frac{1}{(p+2)!}n(n+1)\cdots(n+p)\cdot[(p+1)n+1].$$

用它可以计算四角垛($p=1$)、岚峰垛($p=2$)、三角岚峰垛等，其中四角垛即为

$$\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2).$$

(书中他还给出了“高次招差法”，这一方法直至1678年前后才出现在牛顿(Newton, I.)的著作中)

法国人费尔马(Fermat, P. de)在研究曲边梯形面积计算时，由于沿用阿基米德的分割术从而导致他对自然数方幂和的研究(他在计算 $y=x^n$ 的面积时，以等距的纵标线将面积分成若干窄长条，依据不等式

$$1^n+2^n+\cdots+(m-1)^n<\frac{m^{n+1}}{n+1}<1^n+2^n+\cdots+n^n$$

且不断加密窄长条进行求积)

16世纪日本数学家关孝和(Seki Takakazu)将朱世杰的“招差术”进一步推广，他在《括要算法》中给出

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$$

的公式(他称之为"方垛积",显然是沿用了朱世杰的称谓).

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left\{n^{k+1}+\frac{1}{2}\binom{k+1}{1}n^k+B_1\binom{k+1}{2}n^{k-1}-B_2\binom{k+1}{4}\cdot n^{k-3}+\cdots\right\}$$

这里的 $B_1,B_2,\cdots$ 与我们后文将要叙述的伯努利数相当.

上述公式与荷兰数学家雅各布·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)在《推想的艺术》(又译为《猜度术》)一书给出的公式别无二致(且几乎是同时给出的).

雅各布·伯努利的发现

雅各布·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)1654 年生于瑞士巴塞尔一个商人世家,祖父是荷兰阿姆斯特丹的一位药商,1622 年举家移居瑞士巴塞尔.

雅各布毕业于巴塞尔大学艺术系,但他酷爱数学,一生中有过不少重要发现.比如他发现了等角螺线(对数螺线)的许多有趣性质(这是他毕生钟爱的,因而他将此几何图形刻在他的墓碑上),还对某些级数(包括自然数方幂和)有过深入的研究.由他的侄子出版的《推想的艺术》一书中给出雅谷发现的公式:

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,$$

当 $k=1,2,3,\cdots$ 时分别有

$$S_1(n)=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2},$$

$$S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6},$$

$$S_3(n)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4},$$

……

为了形式上的简洁与整齐，下面考虑 $S_k(n-1)$ 的表达式（注意，这里是 $S_k(n-1)$，即至 $n-1$ 项和）：

$$S_k(n-1)=\frac{n^{k+1}}{k+1}-\frac{n^k}{2}+\binom{n}{1}B_2\frac{n^{k-1}}{2}-\binom{n}{3}B_4\frac{n^{k-3}}{4}+\cdots.$$

这里 $B_2=\frac{1}{6}$，$B_4=-\frac{1}{30}$，$B_6=\frac{1}{42}$，…（亦可视为 $B_0=1$，$B_1=-\frac{1}{2}$，注意它仅有偶数项，即当 $n\geqslant 1$ 时 $B_{2n+1}=0$，这种表示与我们后文将要谈及的伯努利多项式一致而设定的．但有时为了简便计，有些文献将其记为 $B_1=\frac{1}{6}$，$B_2=-\frac{1}{30}$，$B_3=\frac{1}{42}$，…，请注意场合与差别），人们称之为“伯努利数”（Bernoulli 数），它是一组理论和实际上都很重要的数组．

其实，上述等式真正最早的发现者是德国人范哈贝尔（Fanlhaber，J.），但伯努利给出了它的严格证明．

令 B_k 表示第 k 个 Bernoulli 数，则有

Bernoulli 数表

$$B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=\frac{1}{30},\quad B_{10}=\frac{5}{66},$$

$$B_{12}=\frac{691}{2\,730},\quad B_{14}=\frac{7}{6},\quad B_{16}=\frac{3\,617}{510},\quad B_{18}=\frac{43\,867}{798},$$

$$B_{20}=\frac{174\,611}{330},\quad B_{22}=\frac{854\,513}{138},\quad B_{24}=\frac{236\,364\,091}{2\,730},$$

$$B_{26}=\frac{8\,553\,103}{6},\quad B_{28}=\frac{23\,749\,461\,029}{870},$$

$$B_{30}=\frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322},\quad \cdots$$

雅各布在《推想的艺术》中对上述公式极为欣赏，曾称：布里雅丢斯（Bullialdus，I.）编纂的大部头著作《无穷算术》是多么劳

而无功,他在书中费了九牛二虎之力才算了 1 ~ 1 000 的前 6 次方幂和,而我只不过用一页纸,七、八分钟即算出:

$$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + 999^{10} + 1000^{10}$$
$$= 91\ 409\ 924\ 241\ 424\ 243\ 424\ 241\ 924\ 242\ 500.$$

显然,他用了自然数方幂和公式.

幂和公式的推导

如前所说 $S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$,若求其表达式显然只需求出关于 t 的多项式 $S_k(t)$ 满足[4]

$$S_k(t+1) - S_k(t) = t^k.$$

若 $S_k(t)$ 是 $k+1$ 次多项式,则其系数(除常数项外)可由上式确定,常数项由 $S_k(1) = 1$ 确定.

对于 $n \geqslant 1$,考虑 n 次多项式 $\varphi_n(x)$ 满足

$$\varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) = nx^{n-1}.$$

序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的母函数是

$$F(z,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{n!} z^{n-1}.$$

再注意到上式有

$$F(z,x+1) - F(z,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1} z^{n-1}}{(n-1)!} = e^{xz}.$$

考虑它的形如

$$F(z,x) = e^{xz} f(z) + g(z)$$

的解,这里 $g(z)$ 任意,有

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}.$$

但 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处无定义,故可令 $g(z) = -\frac{1}{z}$,则可消除这一奇异性.于是,可通过关系式

$$\frac{e^{xz}}{e^z-1}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{n!}z^{n-1}.$$

定义伯努利多项式 $\varphi_n(x)$.

令 $u(z)=\dfrac{1+z-e^z}{z}$,则在 $x=0$ 处上式可展为:

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z[1-u(z)]}$$

$$=\frac{1}{z}[1+u(z)+u^2(z)+\cdots+u^n(z)+\cdots].$$

因 $\dfrac{1}{e^z-1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^z+1}{2(e^z-1)}$ 及 $\dfrac{e^{-z}+1}{e^{-z}-1}=-\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$,

知级数展开式仅含奇数项(它是奇函数),这样

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}z^{2n-1}.$$

这里 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 恰好是第 $2,4,\cdots,2n$ 个伯努利数,将上式与 e^{xz} 的幂级数展开相乘,有

$$\varphi_n(x)=x^n-\frac{n}{2}x^{n-1}+\binom{n}{2}B_1x^{n-2}-\binom{n}{4}B_2x^{n-4}$$

$$+\binom{n}{6}B_3x^{n-6}-\cdots. \tag{1}$$

在 $\varphi_n(x+1)-\varphi_n(x)=nx^{n-1}$ 中令 $x=0,1,2,\cdots,n$,然后将全部等式两边相加有

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}[\varphi_{k+1}(n+1)-\varphi_{k+1}(0)]. \tag{2}$$

由此给出了自然数方幂和的公式,其中 $\varphi_n(x)$ 由式(1)给出,它被称为 Bernoulli 多项式.顺便指出,$S_k(n)$ 的公式推导还有其他方法,比如可见文献[38].

伯努利(Bernoulli)数的性质、应用及其他

雅各布(Bernoulli,Jakob Ⅰ)在给出自然数方幂和公式的同

时，还给出了 B_n 的递推公式：

$$n \geqslant 2 \text{ 时}, B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k .$$

由此可（递推地）由 $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 给出 B_{n+1} 来.

波利亚（Polya, G.）曾将伯努利方幂和公式“形式地”记为：

$$S_{k-1}(n) = \frac{(n + \mathscr{B})^k - \mathscr{B}^k}{k} (k > 1).$$

注意这里的 $(n + \mathscr{B})^k$ 仍按二项式公式展开，但 $\mathscr{B}^k$ 表示第 k 个 Bernoulli 数 B_k 而非 $\mathscr{B}$ 的 k 次方.

同时，波利亚还给出下面 Bernoulli 递推公式的形式记号：

$$(\mathscr{B} - 1)^k = \mathscr{B}^k, k > 1.$$

这里式左仍按二项式公式展开，但此处 $\mathscr{B}^k$ 仍代表第 k 个 Bernoulli 数.

Bernoulli 数有许多奇妙的性质，比如，斯蒂斯（von Staudt）与克劳森（Clausen, P.）发现：

若 $2, 3, \cdots, p$ 分别为比 $2n$ 因子大 1 的素数，则在 $2n \leqslant 12$ 时，

$$B_{2n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{p}.$$

比如 $B_{12} = -\frac{691}{2\,730}$，而 12 的因子 1, 2, 3, 4, 6, 12 除 3 以外加 1 后均为素数（2, 3, 5, 7, 13），则

$$-\frac{691}{2\,730} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}.$$

Bernoulli 数在数学分析、数论和微分拓扑等许多领域皆有应有. 比如在数学分析中：

函数 $\cot \frac{x}{2}$ 的泰勒展开式中 x^{2n-1} 的系数恰好为 $\pm \frac{B_{2n}}{(2n)!}$.

在数论中,我们知道安克尼(Ankone,N.C.)猜想[6]:

佩尔方程 $x^2 - py^2 = -4$(p 为 $4k+1$ 型素数)的最小解 $x_0 + y_0\sqrt{p}$ 满足 $p \nmid y_0$.

1960 年,莫德尔(Mordell,L.J.)证明了 $p \equiv 5 \pmod 8$ 时,乔拉(chowla,S.)证明了 $p \equiv 1 \pmod 8$ 时,猜想成立的充要条件是,第 $\frac{p-1}{2}$ 个 Bernoulli 数的分子不能被 p 整除.

此外,人们称 $p > 3$ 时,$B_2, B_4, \cdots, B_{p-3}$ 的分子不被 p 整除的素数为"正规素数".在 $3 < p < 100$ 中,除 $p = 37,59,67$(它们被称为非正规素数)外皆为正规素数.

对于不久前获证的费尔马猜想(大定理)来讲,德国数学家库默尔(Kummer,E.E.)在几十年前已证明:

$x^p + y^p = z^p$,p 为正规素数时无整数解.

即猜想对于正规素数成立(部分地证明了猜想).

顺便讲一句:正规素数是否有无穷多个?这是至今仍未获知的问题,尽管早在 1915 年人们已证得:非正规素数有无穷多个.

方幂和的其他求法

早在 1956 年,华罗庚先生在其名著《从杨辉三角谈起》中已为我们提供了求自然数方幂和的一种方法——利用高阶等差级数方法,这一点可详见文[5].下面我们再来介绍几个求方幂和的方法.

1.矩阵方法[7](A.W.F.Edwards)

今考虑 $[x(x+1)]^k - [x(x-1)]^k$ 展开式,再令 $x = 1,2,\cdots,n$,然后两边分别相加(注意式左的前后相消)有

$$[n(n+1)^k]$$

$$= 2\left[k\sum n^{2k-1} + \binom{k}{3}\sum n^{2k-3} + \binom{k}{5}\sum n^{2k-5} + \cdots\right]$$

（其中 $k=1,2,3,\cdots$）.

这里 $\sum n^k$ 表示 $\sum_{r=1}^{n} r^k$ 之意.

对于 $k=2,3,4,5,\cdots$，上式可写成向量矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} [n(n+1)]^2 \\ [n(n+1)]^3 \\ [n(n+1)]^4 \\ [n(n+1)]^5 \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ 1 & 3 & & & 0 \\ 0 & 4 & 4 & & \\ 0 & 1 & 10 & 5 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum n^3 \\ \sum n^5 \\ \sum n^7 \\ \sum n^9 \\ \cdots \end{pmatrix}$$

若记式右的矩阵为 A，则 A 的构成系由杨辉三角形的奇数行删去奇数项，偶数行删去偶数项后剩下的数组成（当然还要适当错位和补 0）.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 \\ & 1 & & 6 & & 15 & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{array}$$

杨辉三角形

这样一来可有（显然 A 非奇异）：

$$\begin{pmatrix} \sum n^3 \\ \sum n^5 \\ \sum n^7 \\ \sum n^9 \\ \cdots \end{pmatrix} = \frac{A^{-1}}{2}\begin{pmatrix} [n(n+1)]^2 \\ [n(n+1)]^3 \\ [n(n+1)]^4 \\ [n(n+1)]^5 \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix},$$

其中 $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & & 0 & \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & \\ -\frac{3}{10} & \frac{5}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

类似地我们还可以求得

$$\begin{pmatrix} \sum n^2 \\ \sum n^4 \\ \sum n^6 \\ \sum n^8 \\ \cdots \end{pmatrix}=\frac{2n+1}{2}\begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 5 & & 0 & \\ 0 & 5 & 7 & & \\ 0 & 1 & 14 & 9 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} [n(n+1)] \\ [n(n+1)]^2 \\ [n(n+1)]^3 \\ [n(n+1)]^4 \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}.$$

如果记上式右矩阵为 B^{-1},我们发现:

$$A=\mathrm{ding}\{2,3,4,5,\cdots\}\cdot C,$$

$$B=\mathrm{ding}\{3,4,7,9,\cdots\}\cdot C,$$

这里 ding $\{a,b,c,\cdots\}$表示对角阵:

$$\mathrm{ding}\{a,b,c,\cdots\cdots\}=\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

其中 $C=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{1}{3} & 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & \frac{2}{5} & 2 & 1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$.

此外,矩阵 B 亦可由 A“加边”而构成:

$$B=A+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & A & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

这显然为我们推导 $\sum n^k$ 带来方便.

2.利用二项式展开(I)[8](D.Acu)

我们容易证明等式:

$$\sum_{j=0}^{k}[(j+1)^{k+1}-j^{k+1}]=(n+1)^k-1.$$

由此我们可有

$$\sum_{j=1}^{n}[(j+1)^{k+1}-(j-1)^{k+1}]=(n+1)^{k+1}+n^k-1,$$

即 $$\sum_r\binom{k+1}{2r+1}S_{k-2r}(n)=\frac{1}{2}[(n+1)^{k+1}+n^{k+1}-1].$$

取 $k=2p$,令 $p=0,1,2,\cdots$,有

$$\sum_{r=0}^{p}\binom{2p+1}{2r+1}S_{2p-2r}(n)=\frac{1}{2}[(n+1)^{2p+1}+n^{2p+1}-1]. \quad (3)$$

取 $k=2p-1$,令 $p=1,2,3,\cdots$,有

$$\sum_{r=0}^{p-1}\binom{2p}{2r+1}S_{2p-2r-1}(n)=\frac{1}{2}[(n+1)^{2p}+n^{2p}-1]. \quad (4)$$

特别地,在式(3)中令 $p=0$,有 $S_0(n)=n$;

令 $p=1$,有 $3S_2(n)+S_0(n)=\frac{1}{2}[(n+1)^3+n^3-1]$.从而(将 $S_0(n)=n$ 代入),

$$S_2(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

类似地,可递推得到 $S_4(n),S_6(n),\cdots$.

而利用式(4)可求得 $S_1(n),S_3(n),S_5(n),\cdots$.

3.利用二项式展开(Ⅱ)[8](D.Acu)

注意到等式(容易验证)

$$\sum_{j=1}^{n}[j^k(j+1)^k-j^k(j-1)^k]=n^k(n+1)^k,$$

由二项式展开有

$$\sum_{r=0}\binom{k}{2r+1}S_{2k-2r-1}(n)=\frac{1}{2}[n^k(n+1)^k],k=1,2,3,\cdots.$$

上式中令 $k=1$ 有 $S_1(n)=\frac{1}{2}[n(n+1)]$;

令 $k=2$ 有 $2S_3(n)=\frac{1}{2}[n(n+1)]^2$,

即 $S_3(n)=\frac{1}{4}[n(n+1)]^2$.

类似地,可求出 $S_5(n),S_7(n),\cdots$.

一个近似公式

布鲁威(Burrow,B.L.)和塔尔伯特(Talbot,R.F.)于 1984 年曾给出自然数方幂和的一个近似公式[7]:

$$\sum_{r=1}^{n}r^k\approx\frac{(n+\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1}.$$

一个更为精细的近似是

$$S_k(n)=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1}\left\{1-\frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\binom{k+1}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{7}{240\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}\binom{k+1}{4}-\cdots\right\}$$

它的详细证明这里不介绍了,有兴趣的读者可参见文献[7].

用前一近似公式可算得 $S_{10}(1000)\approx 9.141\ 04\times 10^{31}$,误差仅为 5×10^{-6}.

上面两公式还可推广到 k 为一般实数的情形.

2.调和级数、幂级数与黎曼猜想

调 和 级 数

1360 年前后,法国人奥雷斯姆(Oresme,N)在他的《欧几里得(Euclid)几何问题》一书中,已证明了下述结论:

级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$(即 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$)不会趋向于某个特定常数(今称"发散"),该级数如今被称作"调和级数".

他所用方法即是当今的所谓"放缩法":

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

显然,后一级数不会趋向于某个常数(发散),从而证明原级数不收敛.

其实,关于调和级数发散可用更为巧妙的反证法证明:若不然,设

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \qquad (*)$$

收敛到 S,而(*)中的偶数项:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

应收敛到$\frac{S}{2}$,因而奇数项亦应收敛到$\frac{S}{2}$.

但 $1>\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}>\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}>\frac{1}{6},\cdots$

故 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$,与上面结论(都收敛到$\frac{S}{2}$)相抵,因而(*)收敛的假设不真.

关于调和级数的发散问题,瑞士数学家雅各布·伯努利(Bernonlli,Jakob Ⅰ)于1689~1704年间有过深入的研究[9],且于1689年给出该级数发散的又一个证明.

数学大师欧拉(Euler,L.)独具匠心地利用调和级数发散的结论给出"素数有无穷多个"的一种证明(最早的证明系古希腊的欧几里得用反证法给出的),他是通过不等式

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right\}>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$(这里 p_k 为第 k 个素数)来完成的,这一点详见[20].

此处,欧拉还证明了:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sim\lim_{n\to\infty}\ln k,$$

即它与 $\lim\limits_{k\to\infty}\ln k$ 是同阶无穷大.欧拉又指出:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

存在,且其值 c = 0.577 215 6…,它被称为"欧拉常数"(前文我们已有介绍).

从调和级数中去掉某些项

调和级数是发散的,但从中去掉某些项后级数有可能收敛.

1914 年美国伊利诺斯(Illinois)大学的肯普奈尔(Kempner, A.J.)证明了下述结论:

从级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 中剔除分母中含 0,1 ~ 9 这十个数码中任一数码的数项后,级数收敛.

比如,富兰克(Frank, Ⅰ.)证明剔除调和级数中分母含 0 的项后级数收敛到 22.4 和 23.3 之间;尔后,鲍斯(Boas, R.)求得该和为 23.103 45….

尽管我们知道:素数在自然数中分布是极为稀疏的,这一点可由我们曾介绍过的如下结论得到:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x}=0,$$

这里 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数.但是我们仍有下述结论:

级数 $\sum\limits_{p}\frac{1}{p}$ 发散,这儿求和系 p 遍历所有素数(下同).

更强的结果有:

(1) $\sum\limits_{p}\frac{1}{p(\ln\ln p)^{\alpha}}$,当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散,当 $\alpha>1$ 时收敛;

(2)$\sum_{p}\frac{1}{p}-\ln\ln p<15$.

此外,我们还知道:

(1)对任意的自然数 n,$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$都不是整数.

(2)每一正有理数都是$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$中有穷多个互异项之和.

(3)对任意数 a,b,$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a+kb}$都不是整数(纳吉尔(Nagell,T.),1924 年).

关于它们的证明可见[49].此外我们还知道:

(4)级数$\sum\frac{1}{p}$(p 遍历素数)发散;但$\sum\frac{1}{p'}$(P'为孪生素数)收敛;

幂级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$的敛散性

由高等数学知识我们知道:

幂级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$,当 $\alpha>1$ 时收敛,当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

前面提到过的雅各布·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)曾研究过级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}$的和,然而他却无法给出其和的表达式,于是他将问题公之于众,这引起了欧拉(Euler,L.)的兴趣,他从代数方程根与系数关系入手,通过类比方法求得[41]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}\quad(\text{这儿}\ \pi\ \text{系圆周率}).$$

(如今看来,欧拉的求解不很严格,但他给出的结论是正确的,说到这儿,你当然会为欧拉的大胆、睿智所折服.)

尔后,欧拉又利用素数分解的基本定理证明了一个更为奇

妙的公式：

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}=\prod_{p}(1-\frac{1}{p^{\alpha}})^{-1}$，这里 α 为大于 1 的实数，$\prod_{p}$ 表示 p 遍历所有素数.

特别地，$\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{2}}\right)^{-1}=\frac{\pi^{2}}{6}$.

数学中确实有着令人难以琢磨的神奇，试想素数的某些关系式居然与圆周率 π 相关联，这确实是令人们意想不到的，但它也正是数学本身蕴含的内在美[4]所致.

黎曼(Riemann)猜想

黎曼(Riemann, G. F. B.)，德国数学家，14 岁时就读大学预科，19 岁入哥廷根大学攻读哲学和神学，但他酷爱数学. 由于哥廷根当时恰好成为世界数学的中心，那儿聚集了一大批当时世界上知名的数学家如高斯、斯坦纳、迪里克雷、爱森斯坦等，这使得黎曼有机会聆听他们的教诲，学习他们的思想，掌握他们的方法. 1849 年，黎曼重回哥廷根大学攻读数学博士学位，毕业后留校任教. 1866 年病逝，享年 39 岁.

黎曼是数学史上最具独创精神的数学家之一，他的一生虽然短暂，但却在数学诸多领域作出了开拓性的工作，他创立了复变函数、黎曼几何，且在组合拓扑、解析数论等许多领域作出重要贡献.

1859 年，黎曼在其《论不大于一个给定值的素数个数》的论文中，提出 6 个猜想，而其中的 5 个均先后被人们解决，唯独下面的猜想至今未能证明(或否定)：

令 $\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$，这里 $s=x+\mathrm{i}y\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi(s)$ 的(非平凡)

零点实部全为$\frac{1}{2}$(或 $\varphi(s)=0$ 的非平凡根都在直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上,这里 $\mathrm{Re}z$ 表示 z 的实部).

换言之,$\varphi(s)=0$,当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时无零点;当 $\mathrm{Re}(s)<0$ 时,有 $s=-2,-4,-6,\cdots$的平凡解.

人们将 $\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$称为黎曼函数(也称 Zeta 函数).

此前,数学家欧拉(Euler,L.)曾发现:当 m 是偶数时,

$$\zeta(m)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}=-\frac{(2\pi\sqrt{-1})^m}{2m!}B_m,\qquad(**)$$

其中 B_m 是 Bernoulli 数:

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=\frac{1}{30},$$

$$B_5=0,\quad\cdots$$

(亦可由等式$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{m=0}^{\infty}B_m\frac{z^m}{m!}$给出)

公式告诉人们:Zeta 函数与超越数 π(因而与圆)有关,也与指数函数有关.

公式发现的背景是:欧拉验算了下面等式:

$$\zeta(2)=\alpha_1\pi^2,\alpha_1\in\mathbf{Q}(\mathbf{Q}\text{为有理数域})$$

$$\zeta(4)=\alpha_2\pi^4,\alpha_2\in\mathbf{Q}$$

$$\zeta(6)=\alpha_3\pi^6,\alpha_3\in\mathbf{Q}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又当 $s\to1$ 时,$\zeta(s)\to+\infty$;

当 $s\in\mathbf{Z}$(复数域),且 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时,$\zeta(s)$亦收敛.

但 $s=3,5,7,9,\cdots$时,$\zeta(s)=?$ 人们不详.

欧拉还发现:$\zeta(m)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}$收敛的太慢,于是他猜测式

(**)应成立.后经十余年努力,他证明了(**)式.

对于 $s=3$ 的情形,1978 年法国数学家阿佩尔(Apery,R.)证明:

$\zeta(3)$不是有理数.

他的依据是等式:

$$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3C_{2n}^n},$$

因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛到 $\zeta(3)$太慢,但$\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3C_{2n}^n}$收敛到$\zeta(3)$快(快慢尺度用近似有理值的分母作为标度,这个工作是 1956 年伦敦大学的罗茨(Roth)给出的),他断言:

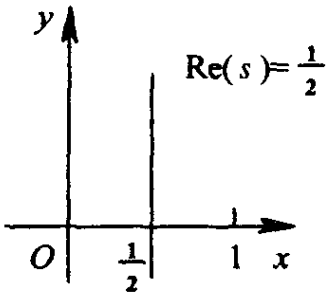
一个数列"不太慢"地逼近一个数,但又达不到那个数,则该数必不是有理数.

当 s 是其他奇数时,$\zeta(s)$的情形,人们不得知.

黎曼进一步研究发现:

Zeta 函数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$,当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 是复平面上的解析函数,但其仅在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时才收敛(绝对一致收敛).

可当它延拓到整个复平面时,它有很好的对称性:



令 $\Lambda(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$,

有 $\Lambda(s)=\Lambda(1-s)$,

此即说 $\Lambda(s)$对于 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$对称.

这样 Zeta 函数

$$\zeta(s)=\begin{cases}0, & I_m(s)\text{为负偶数时;}\\ (**)\text{式右去掉}\pi\text{的方幂后的有理数,} & I_m(s)\text{为负奇数时.}\end{cases}$$

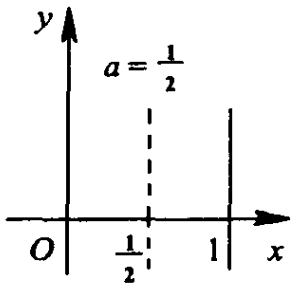
换言之，$\zeta(s)$关于 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$对称，它的零点也应以此为对称.

黎曼又研究了 $\zeta(s)=0$ 的问题，他证明了：

$s=a+b\mathrm{i}$ 的实部 $a>1$ 时，$\zeta(s)$无零点；而当 $a<0$ 时，除了 s 的虚部 $b=-2,-4,\cdots$ 以外（这种零点叫平凡零点），也无零点.

1859 年黎曼进一步猜测：

$\zeta(s)$的非平凡零点，全部在复平面上 $a=\frac{1}{2}$即 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$这条直线上.



这便是著名的黎曼猜想.它至今仍未为人们所证得.

黎曼猜想在数学上甚有用途，如法国数学家阿达玛（Hadamard，J.S.）等证明素数定理 $\pi(x)\to\frac{x}{\ln x}(x\to+\infty)$时就是据 $\zeta(s)$在 $\mathrm{Re}(s)=1$ 没有零点而得出的.又如“数论”中不少结果可以在黎曼猜想成立的前提下改进.1927 年数学家朗道在其名著《数论讲义》中就有“在黎曼假设”下专门一章谈论这类问题.

人们对黎曼猜想的研究取得了如下局部成果：

1903 年，格拉姆（Gram）证明 $\zeta(s)$的前 15 个零点对黎曼猜想成立，这是该猜想研究的最早成果.

五十多年后的 1956 年，人们借助电子计算证明了 $\zeta(s)$的前 25 000 个零点均使黎曼猜想成立；

20 世纪 80 年代初，美国三位数学家用电子计算机（在 $0\leqslant a\leqslant 1,0\leqslant b\leqslant 1.6\times 10^6$ 矩形中）验证了 $\zeta(s)$的前 3.5×10^6 零点无一例外适合猜想（如今的纪录已达前 2×10^8 个零点得以验证）；

1986 年，范·德·鲁内（Van der Lune.te Riele）验算了 $\zeta(s)$的

前1.5×10^9个零点，尔后将纪录不断改进至前10^{18}，10^{19}，10^{20}个零点.

其实，早在1914年，哈代(Hardy，G.H.)就已经证明：

$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$上有$\zeta(s)$的无穷多个零点.

此外，人们还从另外角度研究了$\zeta(s)$零点分布情况，比如：

1924年，塞尔伯格证明$\zeta(s)$的至少0.01即1%的零点位于$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$上；

1972年，美国麻省理工学院的莱文森(Levinson，N.)证明$\zeta(s)$的$\frac{1}{3}$零点在$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$上.

到1989年为止，人们已将上述比例提高到了$\frac{2}{5}$(即$\zeta(s)$有$\frac{2}{5}$的零点在$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$上).

另外，Zeta函数还与所谓欧拉积(Euler积)有关，即$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$，$\mathrm{Re}(s)>1$，$p$遍历全部素数.

还有，人们对某些特殊情形下的$\zeta(s)$的零点分布作了研究，比如对有限域代数簇的情形，阿蒂(Artin，E.)于1921年将黎曼函数推广到代数簇，这为猜想研究另辟他途.

1934年，海色(Hasse，H.)证明黎曼猜想对椭圆曲线成立.

1948年，魏伊(Weil，A.)证明对一般代数曲线黎曼猜想成立.

1973年，戴林内(Deligne，P.)证明对一般代数簇黎曼猜想成立.

然而，问题远没有结束，如今距猜想的完全证明尚有不少距离.随着费尔马猜想(大定理)于几年前的获证，黎曼猜想将成为

下个世纪数学家们首选的奋斗目标,人们期待着攻克猜想的这一天的到来.

黎曼猜想也是著名的希尔伯特23个数学问题中的第8个(问题的一部分),因而它也被称为"希尔伯特第8问题".

2000年5月24日,在巴黎法兰西学院举行的会议中,克莱(Clay)数学促进会宣布了千禧年向世界悬赏征解的七个数学问题中(每个奖100万美元),黎曼猜想为其一.

该促进会是1988年由波士顿商人克莱(Clay, Landon T.)创立,哈佛大学的泰弗(Arthur Jaffe)为董事长.

3.斯坦纳比猜想

17世纪初,法国数学家费尔马(Fermat, P.de)曾提出一个有趣的几何问题:[1][2]

求平面上一点至给定三角形三顶点距离和最小.

这个问题后由麦森(Mersenne, M.)带到意大利.

1640年前后,对于已给三角形三内角皆小于120°的情形,被伽利略(Galileo)的高足托里拆利(Torricelli, E.)解决(这是通过以给定三角形三边为长向其形外分别作正三角形,这些正三角形外接圆公共交点为所求),这个点被称作费尔马(Fermat)点(以下简称F-点,亦称为Torricelli点).

1647年,卡瓦利里(Cavalieri, F.B.)指出:F-点与原三角形三顶点连线夹角皆为120°.

1750年,希姆松(Simpson, B.)发现:F-点可由上述形外三个正三角形的形外顶点与原三角形顶点连线的交点得到.

1834年,海涅(Heinen, F.)解决了所给三角形有内角大于或

等于120°的情形(又称退化情形):该内角顶点即为 F - 点.

上述问题首先由德国数学家高斯(Gauss, G. F.)加以推广[9]:

连结给定平面上四点线段和最小是多少?

19 世纪初,斯坦纳(Steiner, J.)将问题进一步推广:

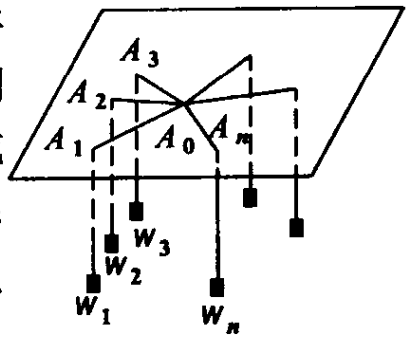
求平面上一点至已给 n 点距离和最小.

此问题即称为 Steiner 问题.它的加权情形可叙述为(三个点的情形于 1750 年由希姆松提出):

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为平面上给定的 n 个点,又 $\omega_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$,求平面上一点 A_0,使 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i |A_0 A_i|$ 最小.

波兰数学家斯坦因豪斯(Steinhaus, H. D.)在其名著《数学万花镜》中给出该问题的一个力学解法:

在已给 n 个点处钻上小孔,然后将 n 条一端系在一起的绳子另一端分别穿过小孔,且在绳子下各挂上重量(或比)为 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 的重物,当整个系统平衡时,绳结位置即为所求的 A_0 点(这显然是利用了位能最小原理).



上述问题,历史上不断有人给出它的解法和讨论.

随着科学技术的发展(比如大规模集成电路的研制或装配线上机器人行走路线设计等),该问题又被人们重新提了出来,不过形式变了花样.

我们知道:平面上已给三点 A、B、C,能够连结(通)它们的线段(仅需两条边)和最小者为

$$\min\{AB + BC, AB + AC, BC + AC\}.$$

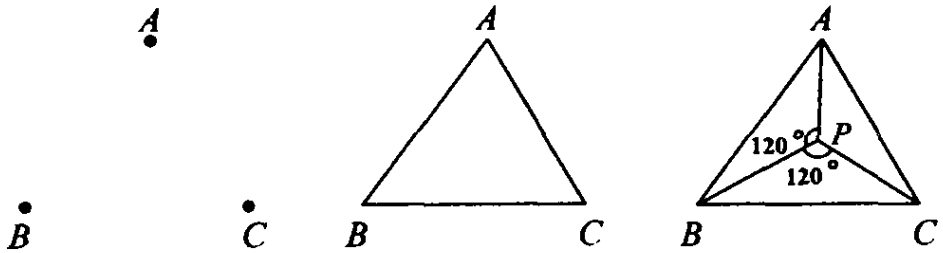
(在《图论》中,AB, BC 或 AB, AC 或 BC, AC 称为支撑树,其长最

小者为最小树.)

但我们同样知道:当△ABC 内增加一点 P 后,能够连结三点的线段和 $PA+PB+PC$ 最小值当且仅当 P 是 F - 点时达到,且此时,

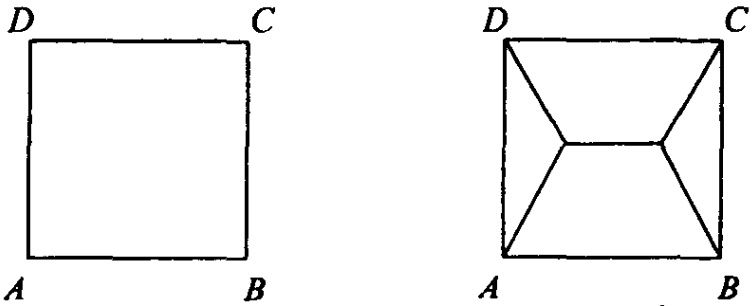
$$PA+PB+PC\leqslant \min\{AB+BC, AB+AC, BC+AC\}.$$

这就是说:平面上给定三点,若再添加一点(它称为 Steiner 点)时,能连通上述三点诸线段和可以缩短.对于给定四点 A、B、C、D(比如正方形四个顶点)情形亦如此,可以证明:

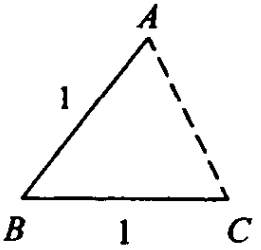


添加两点 P、Q 后,能连通原来四点的线段(比如三条边或两条对角线)和亦可缩短[5][12]:

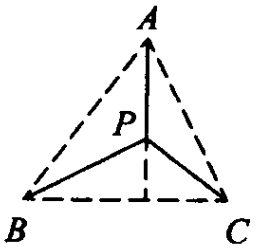
$$PQ+PA+PD+QB+QC<\min\{AB+BC+CD, AC+BD\}.$$



仅以单位正三角形三顶点为例,不添加新点连通它们线段的最小和记为 l_M(它的长为 2),而添加一点后,连通它们线段的最小和记为 l_S(它的长为 $PA+PB+PC$,这儿 P 为 F - 点),容易算得:



$l_M=2$



$l_S=\sqrt{3}$

$$\frac{l_S}{l_M}=\frac{3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.8660$$ （它被称为 Steiner 比），

或 $l_M-l_S=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)l_M\approx 0.134\,l_M$.

这即是说：对于平面三点位于正三角形三顶点时的情形来说，添加一点后，能连通三顶点线段和最小值可比原来缩短 13.4%.

这个结果对于一般平面上给定 n 个点的情形是否成立？

1968 年，Gilbert 和 Pollak 提出如下猜想[6]：

平面上给定 n 个点，增加新点（Steiner 点）后，能连通它们的线段最小和 l_S 和不增加新点而连通它们的线段最小和 l_M 之比：

$\frac{l_S}{l_M}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $l_M-l_S\leqslant(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)l_M$.

这便是著名的关于 Steiner 比猜想（又称 P—G 猜想）.在《图论》中，上述连通已给诸点的线段称为树图（无圈的连通图），因而上述线段和被称为 Steiner 树长，由此 P—G 猜想又被称为“Steiner 树比猜想”.

1992 年，我国旅美学者堵丁柱与美籍华裔数学家黄光明博士撰文宣称 P—G 猜想获证，尔后国内外媒体相继报道，因而轰动数学界，堵、黄二人亦在国内获奖.

四年后（1996 年），《运筹学杂志》发表了越民义先生的文章，对于堵、黄二人的工作提出质疑，尔后二人撰文答辩，同期杂

志又发表越先生对二人文章的答复(几乎否定了二人的工作).孰是孰非,留待大家分辨.

P—G 猜想在很大程度上属于初等数学问题,因而解决它们的工具并不复杂,但愿有识之士加入此文的讨论或给出 P—G 猜想新的证明.

4.等差数列的范·德·瓦尔登定理

这是被前苏联数学家辛欣(Хинчин,А.Я.)称为数论的三颗明珠之一的问题.

1926 年一天中午,德国汉堡大学,荷兰青年范·德·瓦尔登(van der Waerden,B.L.)和他的好友一起走进数学系办公室,他们一起讨论 1920 年德国数学家舒尔(Schur.I)提出的一个猜想:

把自然数集{1,2,3,…}任意分成两部,那么至少其中的一部分里含有项数为任意多的等差数列.

他们在黑板上画了一些图,讨论中常有"灵机一动"想到一些关键的线索,且几乎使讨论出现新的转机,其中的一个终于使问题获解.

首先他们将问题转换为涂色问题.

将每个自然数任意染上红、蓝两色之一,则对任意给定的正整数 l,必存在一个含有 l 项的同色等差数列.

尔后,又将问题由考虑自然数全体改为部分:

对任意给定的正整数 l,存在一个自然数 $W(l)$,使得将 1~$W(l)$染成两色后,必有一个同色的 l 项等差数列.

范德·瓦尔登也同时意识到:要证明前面的猜想,只需证明 $W(l)$的存在即可.

利用枚举法讨论是困难的，范·德·瓦尔登创造了一种方法并证明了：

任给正整数 l,k，必存在一个自然数 $W(l,k)$，使得将 $1\sim W(l,k)$ 染成 k 色后，必存在一个同色的 l 项等差数列.

但是上述证明并没有具体给出 $W(l,k)$ 的值，计算它们是极为困难的（到目前为止人们仅知道五个：$W(3,2)=9$，$W(3,3)=27$，$W(3,4)=76$，$W(4,2)=35$，$W(5,2)=176$），特别是当 l、k 较大时，比如：

$$W(8,2)>7\times 2^7,\ W(10,2)>10^{10^9},\ \cdots$$

又若用克努特记号“↑”递归地定义 $2\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{K}n$：

$2\uparrow n=2^n$，

$2\uparrow\uparrow\cdots\uparrow 1=2$，

$2\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}_{n}n=2\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{k-1}(2\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{k}(n-1))$.

范·德·瓦尔登于 1927 年证明了：

将自然数 $1\sim 2\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{l-1}l$ 染上红、蓝两色之一，其中必可找到一个同色的含 l 项的等差数列.

这一证明曾轰动当时数学界，且被誉为数论中三明珠之一.

1987 年以色列数学家谢拉（Shelah，S.）将上限 $2\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{l}l$ 改进为 $2\uparrow\uparrow\uparrow l$.

此前，格雷汉姆（Graham，R.L.）曾猜测：上界为 $2\uparrow\uparrow l$，即

$$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\quad (k\text{层}2)$$

上个世纪80年代魏斯(Weiss,G.L.)对于舒尔猜想(又称范·德·瓦尔登定理)给出一个简洁而巧妙的证明,他一方面利用赋值办法、一方面动用抽屉原理、证法大意如下:

先把自然数按序排好:1,2,3,4,…

对某种划分来讲,自然数被分成Ⅰ,Ⅱ两部分.我们把自然数1,2,3,…中属于第Ⅰ部分的用0表示;属于第Ⅱ部分的用1表示,这样自然数1,2,3,…可按其划分部分属性得到下面的0-1数列,比如:

001010111…

它表示1,2属于Ⅰ,3属于Ⅱ,4属于Ⅰ,5属于Ⅱ,6属于Ⅰ,7,8,9属于Ⅱ,…

若你要找长为l的等差数列,你可先将上述数列重写l次:

001010111…

001010111…

001010111…

……

001010111…

然后将它们有规则地向左(或右)错动一位(或两位、三位、…)比如

001010111…

001010111…

001010111…

……

001010111…

接下来我们只需在此阶梯状数阵中，找一下有 l 个数码一样的列即可(利用抽屉原理可以证明它的存在).

若该列数字是0，则说明长为 l 的等差数列在第Ⅰ部分；若该列数字是1，则说明该等差数列在第Ⅱ部分.

魏斯等人证明：用此错位排列方式，必然能找到在某列上有相同数码的排列.

当然人们还希望知道这种数列属于分划中的哪一部分，匈牙利的一位数学家曾以一千美元的私人悬赏征求解答，1973年塞曼列弟找到了这个判别方法.

顺便再讲一句：1974年格拉汉姆和罗斯雪尔德(Rothschild)利用《图论》的方法，给出该定理的一个更为简洁的证明.

与之类似的问题还有许多，比如数论中所谓“算术素数列”问题，有人曾猜测：

存在任意长(项数)的相继算术(等差)素数列.

比如251，257，263，269和1 741，1 747，1 753，1 759等是四项的算术素数列.

1967年琼斯(Jones，M.F.)发现了项数为5的此类数列.

$$\{10^{10} + 24\ 493 + 30k\},\quad k = 0,1,2,3,4.$$

尔后兰德尔(Lander，L.J.)等人找到了项数为6的算术素数列：

$$\{121\ 174\ 811 + 30k\},\quad k = 0,1,2,3,4,5.$$

他们还证明了：5项相继算术素数列中最小者为：

$$\{9\ 843\ 019 + 30k\},\quad k = 0,1,2,3,4.$$

且在小于 3×10^8 范围内还有25个项数为5项的此类算术素数列，但不存在项数为6者.

此外,对于算数数列$\{a+nd\}$,$n=1,2,\cdots,n$多大时数列中一定有素数?(等差数列中最小素数问题)

上面问题可化为:c为多少,在$\{a+nd\}$的数列中,当数列中的项不超过d^c时,一定有素数?

1957年,潘永洞证明$c\leqslant 5448$.

1979年,陈景润证明$c\leqslant 17$.

在黎曼猜想成立的前提下,c应不大于$2+\varepsilon$,ε为任意小的正数.

5.货郎担问题解法

1979年11月7日,美国《纽约时报》头版刊载一篇题为《苏联学者的一项发明震惊了数学界》的报道,内容大意为:一位名叫哈奇扬的苏联青年数学家,1979年1月发表了一篇论文,提出一种可以用来解决一类很困难问题的方法,这类问题与有名的"货郎担问题"有关.

稍后,人们在查阅了相关文献后才发现:这是一篇失实的报道.哈氏的论文中并没有能给出货郎担问题一个有效而可行的算法[1].

什么是"货郎担问题"?回答它之前我们先介绍几个与之相关的问题(事实).

哈密顿(Hamilton)周游世界游戏

曾以发明四元数、动力学方程求解而蜚声数坛的英国数学家哈密顿(Hamilton,W.R.)于1859年在他经常光顾的一个市场上公开有奖征答下面问题[1]:

一个旅游者打算周游世界，他选择地球上 20 个城市，每个城市皆与其相邻的三城市间有航线可达、问他能否不重复地游览 20 城市后再回到其出发地？

这个问题其实与下面问题等价：

在一个正十二面体上，你能否从某个顶点出发沿着它的棱不重复地走遍每个顶点后，再回到出发点？

题目一经公布立刻引来大批爱好者跃跃欲试，然而得到的解答却均不令人满意，不久哈密顿公开了自己的解法：

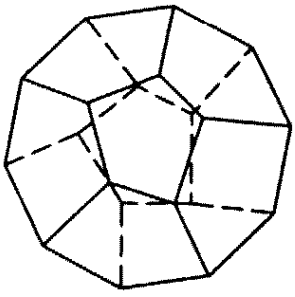


图 1

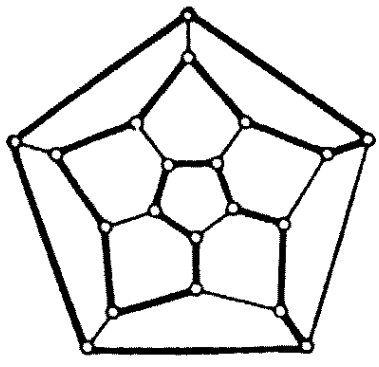


图 2

他首先将正十二面体想像成由橡皮绳做的，然后将它沿某

个面拉伸、抻平面成为一个平面图形，这样原问题则化为一个与之等价的平面问题，从而只需在此平面图形上操作(寻找)，如此一来显然简便多了.图 2 中的粗线所示即为其中一解(问题解答不唯一)，余下的问题只需将它还原到正多面体上即可.

这种方法数学上称为拓扑变换，而有上述性质(不重复地遍历图中所有结点)的回路称为哈密顿回路；不要求回到出发点(其他要求不变)的路线称为哈密顿路.

虫 子 排 队

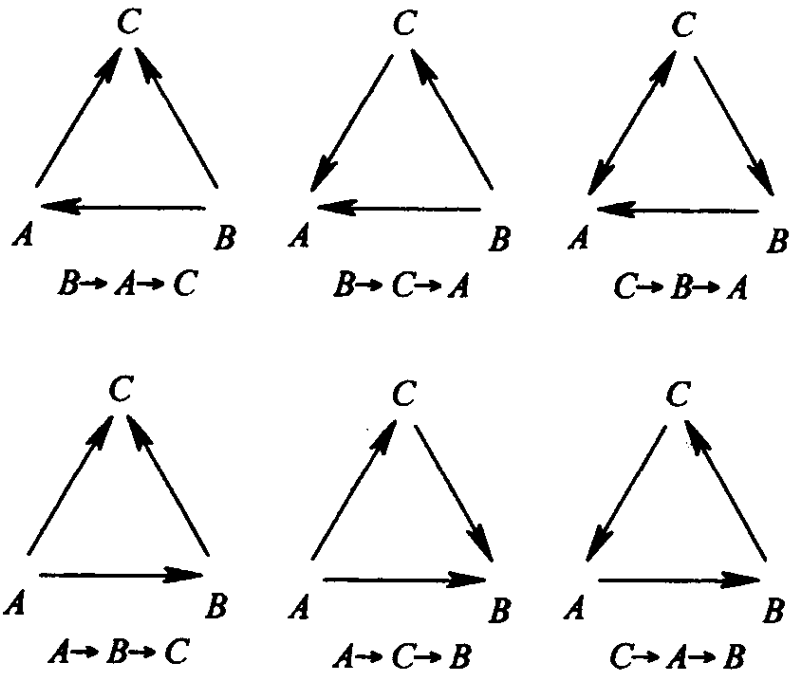
在图论中关于哈密顿路有下面的结论(命题)：

空间中任给 n 个点，若其中任意两点间皆有有向线段(简称为“弧”)边接，则一定有一条有向折线(哈密顿路)，它从某点出发依箭线所示方向遍历所有顶点.

用图论方法证明结论并不轻松，但若证明它下面的等价命题，则变得相对容易(初等)：

有 n 种虫子，若将任意两种放在一起，其中必有一种可以吃掉另外一种.试证：必可将这 n 种虫子依某种顺序排列成一队，而使前面一种虫子总可吃掉与之相邻的后面一种虫子.

这个问题我们不难用数学归纳法严格证明它[39].今用 $A \succ B$ 表示虫子 A 可以吃掉虫子 B.



$n=3$ 的情形

图 3

①$n=2$ 时,命题显然成立;

②设 $n=k$ 时命题真.令 $A_i(1\leqslant i\leqslant k)$

表示 k 种虫子,不妨设它们排成命题要求的队列为:

$$A_1\succ A_2\succ A_3\succ\cdots\succ A_{k-1}\succ A_k.$$

下面考虑 $n=k+1$ 即在上述情形里加进一种虫子 A_{k+1},这时将有:

i)若 $A_{k+1}\succ A_1$,则只需将 A_{k+1} 放在 A_1 前,问题获解;

ii)若 $A_{k+1}\succ A_1$,则将 A_{k+1} 与 A_2 试之,如 $A_{k+1}\succ A_2$,则只需将 A_{k+1} 置于 A_1 与 A_2 之间便可;否则重复试验下去,经有限($\leqslant k$)次后必有:

或 $A_{i-1}\succ A_{k+1}\succ A_i(1\leqslant i\leqslant k)$,或 $A_k\succ A_{k+1}$,无论何种情形问题均告解决.

从而 $n=k+1$ 时命题亦真.

如果将“虫子”对应成“点”,将“吃掉与被吃掉”的关系用

“→”表示，显然，“虫子排队顺序”对应了“哈密顿路”.

最短路径

图论中还有一类网络(即赋值连通图，且区分有向与无向)最短路径问题：

如图4(无向)网络中，图中线段(与几何中的“线段”意义有别，这儿应称为“边”以与“弧”区别)旁边的数字(即权重)表示该段路(边)的路长，请你求出从 V_1 到 V_7 的最短路径来(只需求出它们间的最短路线).

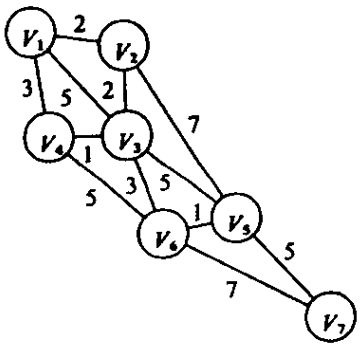


图4

图论中有迪屈斯特拉(Dijkstra)标号法(1959年提出)可解决此类问题，然而这将是一项十分繁琐的工作(如果网络中的结点数较多、如果单凭手算的话).

模拟法有时可为我们提供解此类问题的一个近似方法(当然它不严格)：

用(无弹性的)细线或细铁丝依照网络中线段尺寸依次截出诸线段，再将它们依图绑扎好(可在结点处做下记号以区分 V_1，V_2，…，V_7).然后，一手握住 V_1，一手握住 V_7，轻轻抻拉，当拉至某一位置时，必有其中一条链线最直，这便是我们要求的 V_1 至 V_7 的最短路径(见图5)：

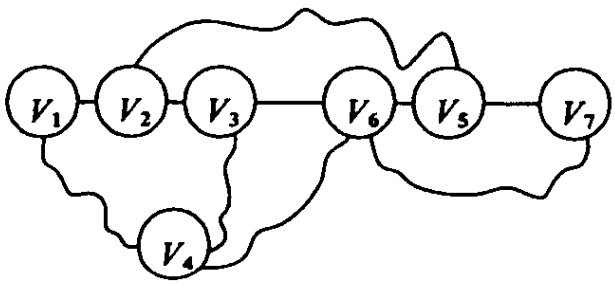


图5

此法亦为计算机模拟解决网络最短路径问题提供某种思路.

货郎担问题

前面我们已经介绍了哈密顿(Hamilton, W.R.)游戏与网络最短路径问题,“货郎担问题”(又称推销员问题)实际上可视为两类问题的结合与拓广,问题提法是[43]:

假如有货郎要去 n 个村庄售货后仍回到他的出发点,这些村庄间各有若干条路好走,但诸路长短不一.请问:他应如何走才能使他的行程最短?

这其实亦可视为求赋权图(网络)中的哈密顿回路问题的拓广(这儿既要求每个结点恰好经历一次,同时要求总路径最短).

(顺便讲一句:若要求遍历网络中所有的边而回到出发点,且要求其总路径最短的问题称为“中国邮递员问题”,此系我国学者管梅谷先生 1962 年提出.)

对于三、五个村庄来讲,问题也许并不难解决,只需列出全部可能路线,再逐个比较便不难找出最短路径.但当村庄数目较多时,运算难度随之极快增长.以至连大型电子计算机也无能为力.

用数学归纳法可大致估算出:若村庄数为 n,货郎可选路径将有 $(n-1)!$ 条,计算完每条路径长再去比较需进行 n 次计算,这样总计至少要有 $n!$ 种算法.

$n!$ 是一个随 n 增大增长极快的数字,依据高等数学中著名的 Stirling 公式:

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0<\theta<1)$$

推知,当 $n \gg 1$ 时我们有

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

比如，当 $n=30$ 时，粗略算得 $30! \approx 2.6\times10^{32}$，即便使用当今速度最快每秒万亿次的电子计算机完成它的运算仍需 8 万亿年，这显然无法实现，故此类现象又称“维数障碍”.

遗憾的是：至今人们仍未找到货郎担问题的有效算法，人们仅给出一些近似解法：

1954 年，丹齐格(Dantzig, G.B.)等在研究该问题时，提出将问题分解成若干子问题和的思想.

1960 年兰迪(Land, A.H.)和道格(Doig, A.G.)又对货郎担问题提出一个分解算法.

上述两项研究也为运筹学中整数规划问题提供了两种解法：割平面法和分支定界法.

近年来有人又给出一些近似算法，从而派生出新的运筹学分支——多面体组合，因而这个课题也是运筹学中最具挑战性的问题之一.

前面提到的哈奇扬所解决的问题，是关于线性规划问题有无多项式次算法(称为好算法)问题，哈奇扬本人给出一种这类算法，但它与货郎担问题并非一回事.

6.漫 话 分 形

引　　理

大千世界，造化无穷，千姿百态，传统几何所描绘的平直、正则、光滑的曲线，在自然界可谓鲜有.无论是起伏跌宕的地貌、弯

曲迂回的河流，还是参差不齐的海岸、光怪陆离的山川；无论是袅袅升腾的炊烟、变幻飘忽的白云，还是杂乱无章的粉尘、无规则运动的分子、原子；……刻画所有这一切，传统几何已无能为力.人们需要新的数学工具.

微积分发明之后，数学家们为了某种目的(如构造连续但不可微函数、周长无穷而所围面积为零的曲线等等)而臆造的曲线，长期以来一直被视为数学中的“怪胎”.然而，这一切却被某些慧眼识金的数学家看作珍奇(因而从某些角度考虑它们又被看成数学中的“美”[41])，经过加工、提炼、抽象、概括而创立了一个新的数学分支——分形.

海岸线长

20世纪60年代，英国《科学》杂志刊载美籍法国数学家曼德布鲁特(Mandelbrot，B.B.)的文章《英国海岸线有多长?》这个看似不成问题的问题，却让人们大吃一惊：人们除了能给出如何估算的方法性描述外，却得不出肯定的答案[2]——海岸线长会随着变量标度(或步长)的变化而变化.

因为人们在测量海岸线长时，总是先假定一个标度，然后用它沿海岸线步测一周得到一个多边形，其周长可视为海岸线的近似值.

显然，由于标度选取的不同，海岸线长数值不一，且标度越细密，海岸线数值越大.确切地讲，当标度趋向于0时，海岸线长并不趋向于某个确定的值.

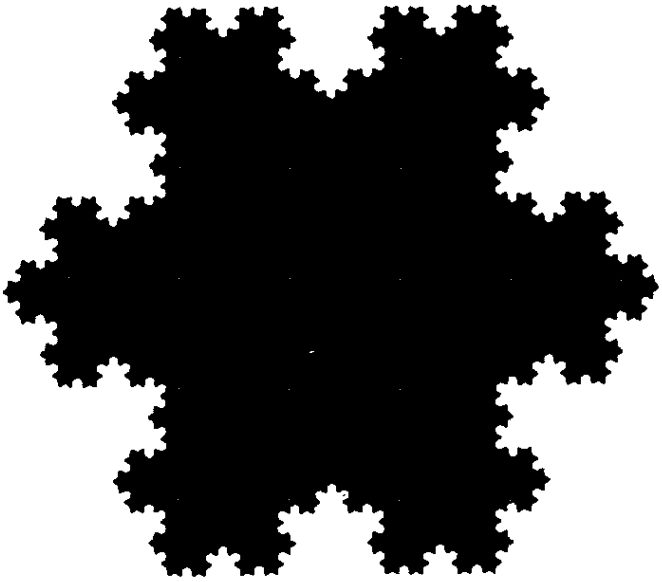
其实,在数学中这类问题许多年前已为人们所研究.

科赫曲线

人们常用"雪飞六出"来描述雪花的形状,其实雪花并不只是呈六角星形,这是由于它们在结晶过程中所处环境不同而致.

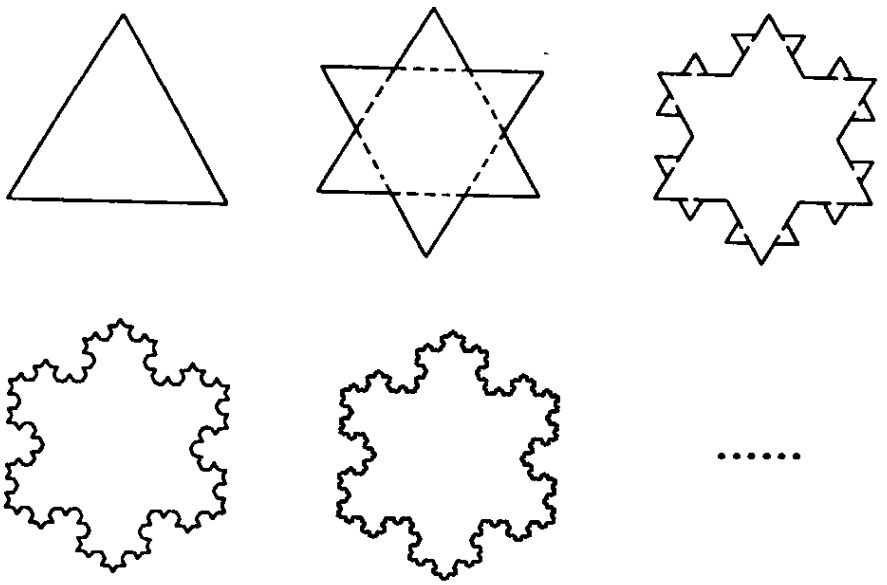
仔细观察六角雪花会发现它并非呈一个简单的六角星形,用放大镜去看,形如下页图.

1906年,数学家科赫(Koch,H.von)在研究构造连续而不可微函数时,提出了如何构造能够描述雪花的曲线——科赫曲线.



将一条线段去掉其中间的$\frac{1}{3}$,而用等边三角形的两条边(它的长为所给线段长的$\frac{1}{3}$)去代替.不断重复上述步骤可得所谓的科赫曲线.

如果将所给线段换成一个等边三角形,然后在等边三角形每条边上实施上述变换,便可得到科赫雪花图案:



这是一个极有特色的图形.设原正三角形边长为 a,可算出上面每步变换后的科赫(曲线)雪花的周长和它所围的面积分别是:

周长:$3a$, $\frac{4}{3}\cdot 3a$, $\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot 3a$, $\cdots \to \infty$

面积:$S_0=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $S_0+\frac{1}{3}S_0$, $S_0+\frac{1}{3}S_0+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)S$, $\cdots$

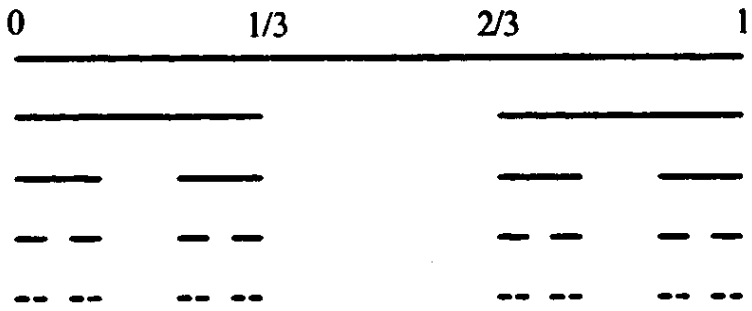
$\to \frac{8}{5}S_0=\frac{2}{5}\sqrt{3}a^2$.

这就是说,科赫雪花不断实施变换"加密",其周长趋于无穷大,而其面积却趋于定值.

康托(Cantor)粉尘集

数学中产生上述怪异现象的例子由来已久,集合论的创始人康托(Cantor,G.)为了讨论三角级数的唯一性问题,于 1872 年曾构造了一个奇异的集合——康托(粉尘)集.

将一个长度为 1 的线段三等分,然后去掉其中间的一段;再将剩下的两段分别三等分后,各去掉中间一段,如此下去,将得到一些离散的细微线段的集合——康托集:

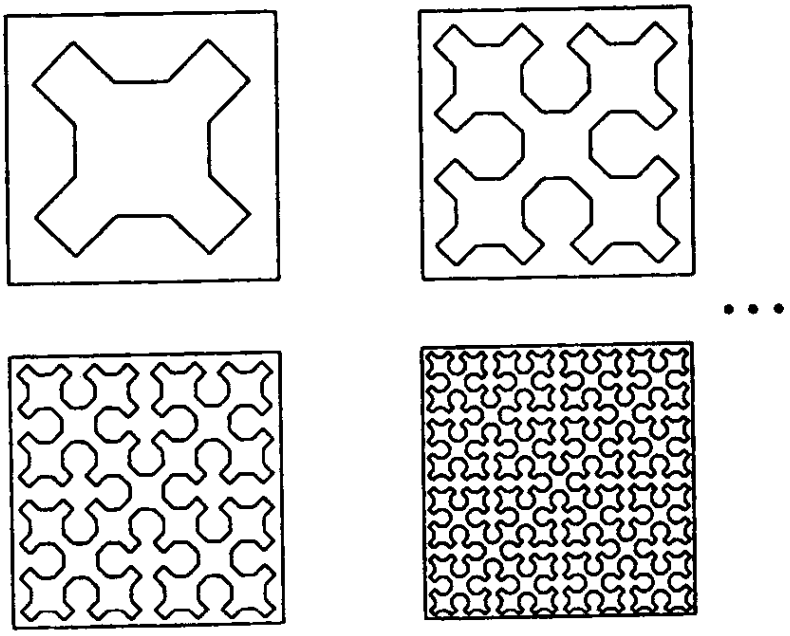


这个集合的几何性质难以用传统术语描述,它既不是满足某些简单条件的点的轨迹,也不是任何简单方程的解集.

康托集是一个不可数的无穷集合,它的大小不适于用通常的测度和长度来度量,而用合理定义的长度去度量它时,其长度总和为 0.

皮亚诺(Peano)曲线

在我们通常的认识中,点是 0 维的、直线是 1 维的、平面是 2 维的、空间是 3 维的等等(这实际上是由确定它们的最少坐标个数而定).但是,1890 年意大利数学兼逻辑学家皮亚诺(Peano G.)却构造了能够填满整个平面的曲线——皮亚诺曲线,具体的构造不难从下面的图示中看出.

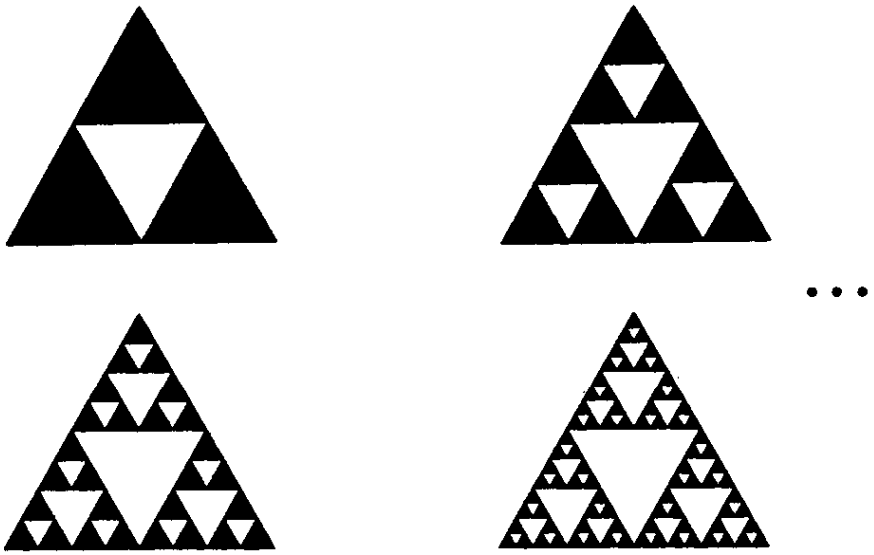


西尔平斯基衬垫和地毯

这显然也是一条“怪异”曲线:它是一条曲线(故面积为0)但却可以填满一个正方形(显然面积不为0).

1915年,波兰数学家西尔平斯基(Sierpinski,W.)制造出两件绝妙的“艺术品”——衬垫和地毯.

把一个正三角形均分成四个小正三角形,挖去其中间一个,然后在剩下的三个小正三角形中分别再挖去各自四等分时的中间一个小正三角形.如此下去可得到西尔平斯基衬垫.



西尔平斯基衬垫

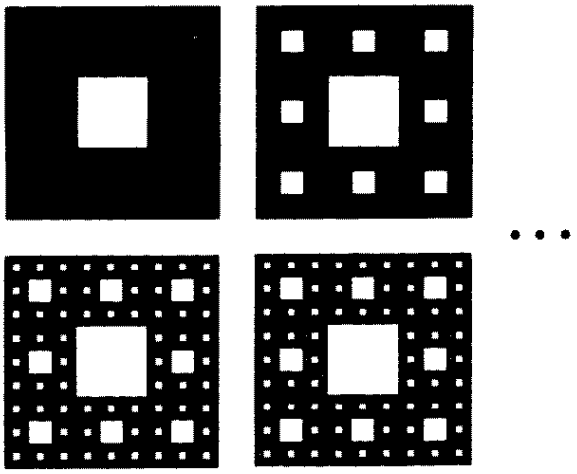
容易看到,无论重复多少步总剩下一些小的正三角形,而这些小正三角形的周长越来越大而趋于无穷,它们的面积和却趋于0.

从某种意义上讲,上述衬垫实际上是康托粉尘集在二维空间的拓广.

此外,西尔平斯基还用类似的方法构造了西尔平斯基地毯.

将一个正方形九等分,然后挖去其中间的一个;再将剩下的八个小正方形各自九等分后分别挖去其中间的一个小正方形;重复上面的步骤……,由此得到的图形(集合)称为西尔平斯基

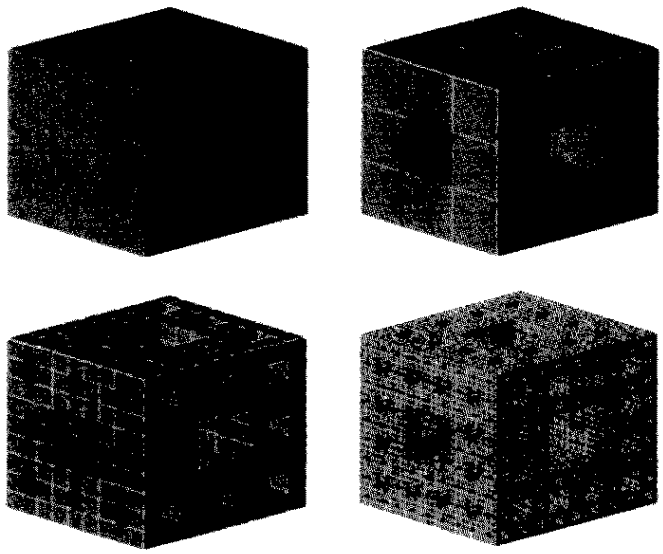
地毯.同样,它的面积趋于0,而线的长度趋于无穷大.



西尔平斯基地毯

西尔平斯基又将他的杰作推向了3维空间.

将一个正方体每个面九等分,这样它被等分成27个小正方体,挖去体心与面心处的7个小正方形;然后对剩下的20个小正方体中的每一个实施上述操作,如此下去……



西尔平斯基海绵

人们把这个千"窗"百孔的正方体(它正像日常生活中见到的海绵)称为西尔平斯基海绵,它的表面积趋于无穷大,而它的体积趋于0.

分 数 维

上面我们罗列了数学中种种貌似病态的“怪物”,你也许除了惊异之外不会想到它们的另一面——共性且内涵深邃的一面,一旦把握了它们便会孕育着新概念的产生.

20 世纪 70 年代中期,曼德布鲁特在《自然界的分形几何》一书中率先提出挑战,是他第一次完整地给出“分形”及“分数维”的概念(后者最早由豪斯道夫(Hausdorff,F.)于 1919 年提出,他认为空间维数可以连续变化,不仅可以是整数,也可以是分数),同时提出分数维数的定义和算法,这便诞生了一门新的数学分支——分形几何.

如前所述,我们通常把能够确切描述物体的坐标个数称为维数,如点是 0 维的、直线是 1 维的、平面是 2 维的……

那么,分数维数如何定义呢? 我们以科赫曲线为例说明,这里主要介绍与分形关系较密切但最易理解的所谓相似维数[3].

粗略地讲(请见前文“代序”中的细节):

若某图形是由 a^D 个全部缩小至 $\frac{1}{a}$ 的相似图形组成的,则 D 被称为相似维数.

设经过 n 步变换的科赫曲线的每条长为 $\delta=\left(\frac{1}{3}\right)^n$,故 $n=-\frac{\ln \delta}{\ln 3}$,而此时曲线总长为 $N(\delta)=4^n=4^{-\frac{\ln \delta}{\ln 3}}$.这样,

$$\ln N(\delta)=-\frac{\ln \delta}{\ln 3}\ln 4=-\frac{\ln 4}{\ln 3}\ln \delta=\ln \delta^{-\frac{\ln \delta}{\ln 3}}=\ln \delta^{-D}.$$

从而,$D=\frac{\ln 4}{\ln 3}\approx 1.261\,9$ 称为科赫曲线的维数.

大致地讲,若 k 为图形放大倍数,而 L 为边长(线性)放大

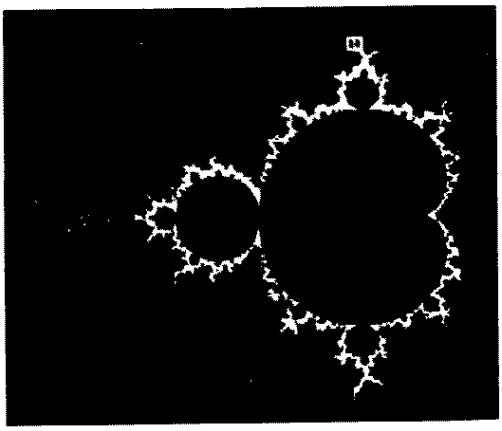
倍数，则 $D=\frac{\ln k}{\ln L}$.

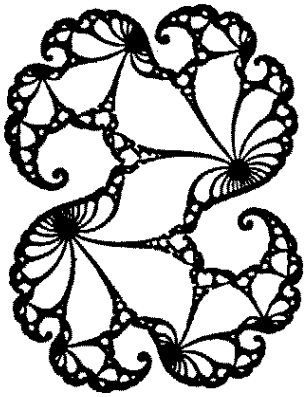
人们熟知：对于任何一个有确定维数的几何体，若用与之相同维数的“尺子”去度量可得一个确定的数值；若用低于它维数的“尺子”去度量，结果为∞；若用高于它维数的“尺子”去度量，结果为0.这样用普通的标尺去度量海岸线显然不妥了(海岸线的维数大于1而小于2).

仿上我们可计算出前述诸图形(集合)的维数：

曲线	康托粉尘	科赫曲线	皮亚诺曲线
维数	0.630 9	1.261 9	2
曲线	西尔平斯基衬垫	西尔平斯基地毯	西尔平斯基海绵
维数	1.585 0	1.892 8	2.726 8

从上表易想像出，维数为1～2的曲线维数表示它们的弯曲程度和能填满平面的能力；而2～3维曲面维数表示它们的复杂程度和能填满空间的能力.





分形图

分形从创立到现在不长的时期里已展示出其美妙、广阔的前景，它在数学、物理、天文、生化、地理、医学、气象、材料乃至经济学等诸多领域均有广泛应用，且取得了异乎寻常的成就，它的诞生使人们能从全新的视角去了解自然和社会，从而成为当今

最有吸引力的科学研究领域之一.

1993年,以曼德布鲁特为名誉主编的杂志《分形》创刊,这无疑会对该学科发展起到推波助澜的积极作用.

7.混沌平话

秩序与无序、和谐与混乱、规律与浑沌间的矛盾与共存,是宇宙万物间永恒的主题.

从广漠浩瀚的星空,到神奇莫测的海底;从复杂难卜的气象,到倏忽万变的浮云;从高天滚滚的寒流,到涛涛扑面的热浪;从地震、火山的突发,到飓风、海啸的驰至;从千姿百态的物种,到面孔、肤色各异的人类……天文地理、数理生化,大至宇宙,小至粒子皆似无序、混乱,同时又存在秩序、蕴含规律.

传统科学家面对这一切也许会感到困惑与不解,甚至束手无策,尽管他们已在诸多方面获知了法则与规律.

某种与生俱来的冲动促使人类力图理解自然界的规律,寻找宇宙万物难以捉摸的复杂性背后的法则,从无序中找出秩序,从混沌中找出和谐.

混沌学——现代科学与电子计算机结合的产物——也许可为人类的"冲动"带来生机与希望.

混沌是人生之钥

"混沌是人生之钥",这是19世纪英国物理学家麦克斯威尔(Maxwell,J.C.)的名言.

混沌原指杂乱无章.

古希腊人认为:混沌是宇宙的原始虚空.

中国古代哲人老子说:“道生一,一生二,二生三,三生万物”中的一系指道生出来的浑沌之气,老子又说:“有物混成,先天地生.”意指混沌是天地生成之前的状态.

我国古代典籍《庄子》中写到:“万物云云,各复其根,各复其根而不知,浑浑沌沌,终身不知,若彼知之,乃是离之.”此即说混(或浑)沌是介于可知与不可知之间潜在万物云云的根源.

混沌被人类感知可谓由来已久,然而当人们试图深入地认识它、了解它(当然这与人类文明进程、科学技术发展状况有关)时始发现:

混沌不仅属于哲学,同样属于科学(狭义);混沌不仅存在于自然现象里,也存在于人类现象、社会现象、历史现象中.

混沌在字典中定义为“完全的无序,彻底的混乱”.在科学中它定义为:由确定规则生成的、对初始条件具有敏感依赖性的回复性非周期运动.

作为“仆人”和工具的数学从独道的蹊径(从本质去抽象)去探索这个问题时,将显得更自然、更贴切、更深邃、更有生气,这其中的结果既是显见而确定的,又是本质和普适的.正如美国数学史家倍尔(Bell,J.L)说的那样:“数学的伟大使命在于从混沌中发现秩序.”正因为数学的加盟才使“混沌学”得以长足发展.

数学上如何定义混沌?

1986 年伦敦一次国际混沌学会议上与会者提出:

数学上的混沌系指确定性系统中出现的随机状态.[8]

这个定义显得有些笼统,迪瓦内(Devaney,R.J.)于 1989 年给出一个较严格的定义:度量空间 X 上的自映射 $f:x\to x$ 满足:①该映射的周期点构成 X 的一个稠密集;②映射对初始条件有敏感的依赖性;③映射是拓扑遗传的,则映射称在 X 上是混沌的.

尔后人们又从数学角度陆续给出其他一些定义，比如陶比(Pat Toubey)定义：映射 $f: x \to x$ 在 X 上是混沌的，若 X 的每一对非空子集均可用一个周期轨道将它们串起来.

它看上去也许过于专业，不过稍后我们会略加解释.当人们仔细审视这一定义时又发现：在近代，对混沌的理解和研究最早始于前面我们曾提到过的英国物理学家麦克斯威尔.

为电磁学发展做出过杰出贡献的麦克斯威尔是第一个从科学角度去理解混沌的人，他在研究电磁学理论时已发现了“对初始值敏感依赖性”的系统存在，且指出了它的重要性.

法国数学家庞加莱(Poincaré, H.)对于混沌的理解更为深入，他在研究动力学系统时引入一个特殊的“三体问题”：

两个质点沿同一圆周运动，第三个质点质量为零，当映射的一个不动点(这些我们稍后将作解释)的稳定流形和不稳定流形非平凡相交时，复杂行为即对初始值敏感和周期轨道无限便出现了.

这显然是出现了混沌现象.

然而，混沌真正被作为一门科学来研究只是1960年前后的事.

20世纪60年代初，科学家们对天气进行计算机模拟的尝试(这种思想源于1922年英国物理学家理查森，他首先提出用数值方法来预报天气).天气是一个庞大而复杂的系统，即使你能理解它，但你很难准确预测它.

传统物理学家认为：给定一个系统的初始条件的近似值，且掌握其自身规律，你就可以计算出该系统的近似行为.

然而对天气系统来讲，上述认为却大失水准：该系统对初始条件变化十分敏感(这样初始值的近似显得尤为重要，然而它的较精确获得极为困难).小小的差异可能导致不同的后果.这样，天气预报(即天气趋势报告)尽管是人们在大型高速电子计算机

上完成的,但迄今为止:两天之内的预报较为可信,第三天的预报可信度仅有 70%(至多),三天以上的预报可信度就更低,至于中长期天气预报将很难逼真.

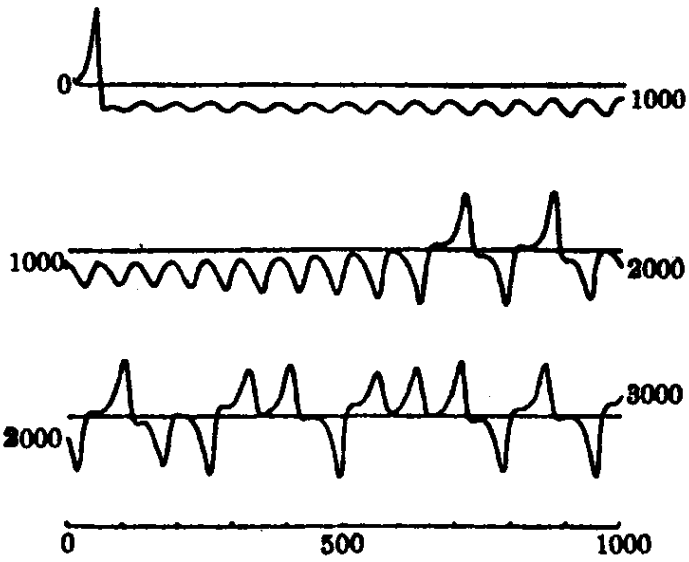
然而我们必须强调一点:天气的不可预测不等于天气变化的无规律,只不过这其中的奥秘尚未为人们认识或完全认识而已.

1963 年美国麻省理工学院的洛伦兹(Lorenz,E.)在《大气科学杂志》上发表一篇题为"确定性非周期流"的论文,文中预示了非线性动力学(混沌学的一部分)的若干重要思想,其中提到[6]:

有限的确定性非线性常微分方程系统可被设计成表示受迫耗散流体动力学流.这些方程的解可以等同于相应空间中的轨线.对于那些有有界解的系统,非周期解对初始值的小修正而言通常是不稳定的,以致略微不同的初始状态会演变为显著不同的状态.

这段话他通俗地解释为"蝴蝶效应":某个蝴蝶今天的振翅所导致大气状态的微小变化,经过一段时间,大气的实际状态可能远远偏离了它应该达到的状态:一个月后某地的飓风可能不再发生,而另外某地却可能发生了本不该到来的暴雨.

这便是说:小小误差的积累、放大、膨胀可能使系统变得面目全非(不确切地比喻正如多米诺骨牌:一张多米诺骨牌能推倒尺寸为其 1.5 倍的下一张骨牌的话,一套 13 张的骨牌,推倒其第一张所耗的能量同样被逐级放大,当导致第 13 张骨牌倒下时释放的能量已被放大了 20 多亿倍,这一点人们似乎难以想像,然而它又千真万确).这也正是天气难以准确预报的原因.



天气预报中对流方程进行3 000次迭代后,振荡加大,变为混沌

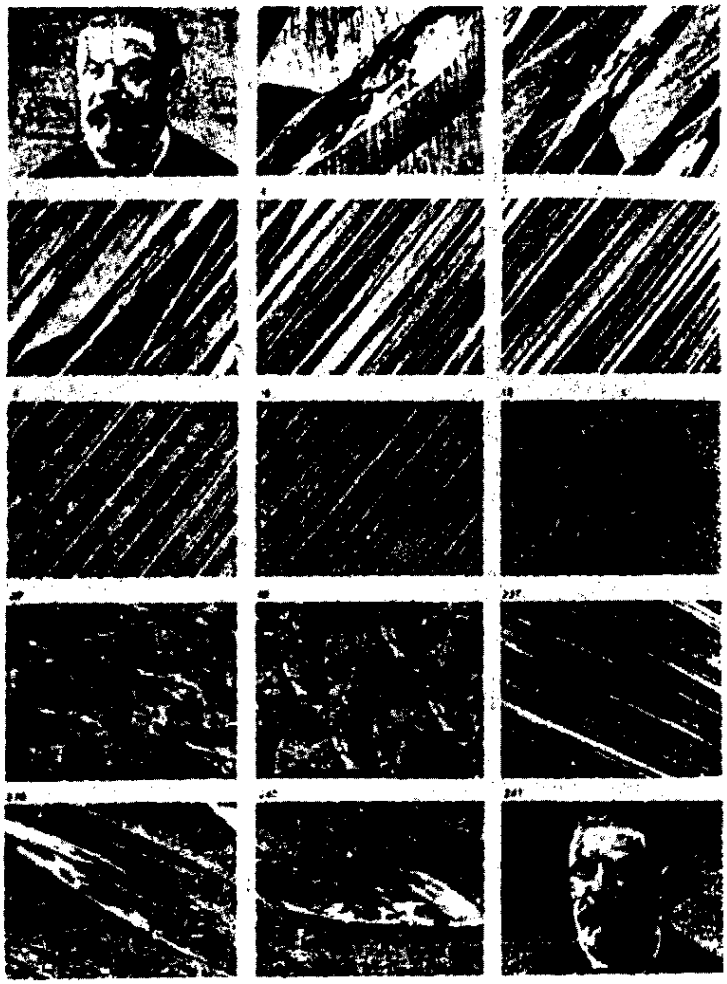
数学中的变换

由常量研究向变量发展是数学发展史上的重要里程碑,微积分的发明正是这种发展的标识.

随着变量数学的研究,变换、更广义地称为映射成了数学的一个重要概念,某种意义上它是“函数”概念的拓广.

早在十九世纪法国数学家庞加莱(Poincaré,H.)曾指出:

反复地对一个数学系统施加同样的变换,若该系统变换后不脱离一个有界区域,则它必将无限地回到接近它初始状态的状态.



庞加莱肖像，表明他的发现“庞加莱回复”.如果反复地对一个数学系统施加变换，而且这系统不脱离一个有界区域，则它必无限频繁地接近它的初始状态

这一点看上去也许太抽象，下面我们举几个简单的例子.

用一个计算器从某个数(比如 2)开始，然后反复按下一个函数(比如 cos)运算键，这时计算器上依次显现出下面结果：

2→cos2→cos(cos2)→cos[cos(cos2)]→…它们的实际值是：

2 → 0.999 390 827 → 0.999 847 88 → 0.999 847 741 → 0.999 847 741→…

我们发现：算至第四步结果将不再变化(可称其不动或自循环)，这个过程实际上相当于求得方程 $x = \cos x$ 的一个根(弧度制).从函数映射观点看，0.999 847 741 是映射 $f: x \to \cos x$ 的一

个不动点.

其实,重复的某些数字运算有时也会产生类似的有趣现象,比如"数字黑洞".

所谓数字黑洞系指某些整数经过反复的特定运算最终归一或归于某个循环圈的情形(这其中的某些,我们前文已有叙述).请看:

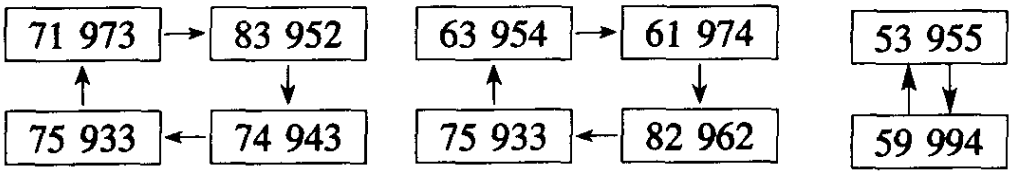
(1)卡布列克(kabulek)运算

任给一个四位数(其各位数字不完全相同)先将它依数字大小顺序排成一个新的四位数,然后减去这个新四位数的倒序,如此称为一步卡布列克运算.将每步运算所得的数差再反复重复上述运算,经有限步后结果必为 6 174.比如 2 126 依照规则运算结果依次为:

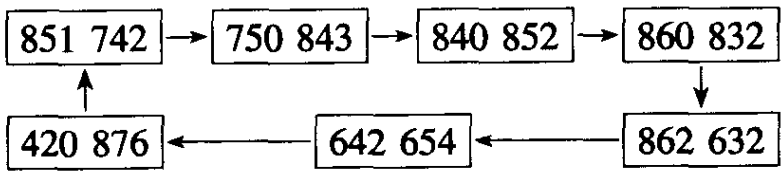
$$\begin{array}{cccccc} 6\,221 & 9\,954 & 5\,553 & 9\,981 & 8\,820 & 8\,532 \\ -1\,226 \rightarrow & -4\,599 \rightarrow & -3\,555 \rightarrow & -1\,899 \rightarrow & -0\,288 \rightarrow & -2\,358 \\ \hline 4\,995 & 5\,355 & 1\,998 & 8\,082 & 8\,532 & 6\,174 \end{array}$$

倘若接着运算下去,其结果依然为 6 174.

而五位数的卡布列克运算经有限步骤后进入下面三种循环之一:



至于六位数的卡布列克运算经有限步骤后或为 549 945,或为 631 764 或进入下面循环:



更高位数的卡布列克运算也有规律,这儿不多谈了.

(2)角谷游戏

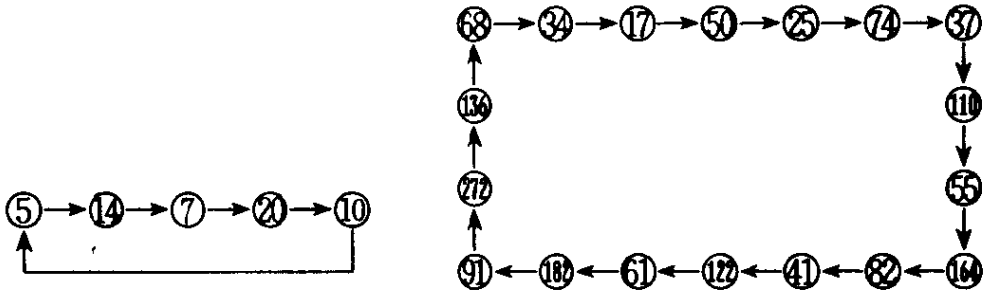
二次大战期间,美国一个叫叙古拉的小镇流传一种数字游戏,后来它被传到欧洲,且在那儿风靡一时;尔后又被日本人角谷带到了日本,人称"角谷游戏".内容是这样的:

任给一个自然数,若它是偶数则将它除以2;若它是奇数,则将它乘以3再加1.反复重复这样运算,经有限步之后其结果必为1.

顺便讲一句:这个貌似简单的结论至今未能给出严格证明,尽管有人利用电子计算机对 $1 \sim 7 \times 10^{11}$ 的所有整数核验无一例外.

有人甚至将运算方法略加改动,所得结果依然神奇,比如:

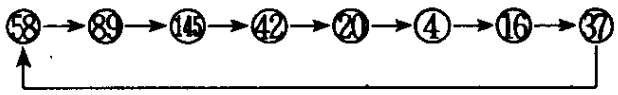
任给一个自然数,若它是偶数则将它除以2,若它是奇数则将它乘以3再减1.重复上述步骤,经有限步运算后结果或为1或进入下面循环圈之一:



有人也对 10^8 以内的整数进行核验亦未发现例外.

(3)数字平方、立方和

将任一自然数的各位数字平方求和,再对所求之和重复上述运算,经有限步骤后结果或为1,或进入下面的循环:



对于求数字立方和运算(步骤同上)由于所给自然数 n 的不同,运算结果也不一样(有9种),然而其"命运"却是殊途同归:进入"黑洞"(见下表).

数字立方和运算结果表

所给自然数 n 的类型	运算结果
$3k$	153
$3k+1$	1、370、136 ⇄ 244、919 ⇄ 1459 250→133→55　　127→352→160
$3k+2$	371、407

前文已述，人们发现等式

$$1^3+5^3+3^3=153,\qquad 3^3+7^3+0^3=370,$$

$$3^3+7^3+1^3=371,\qquad 4^3+0^3+7^3=407$$

的形状俏皮，便将这四个数誉以“水仙花数”的美称.

能产生“数字黑洞”的运算还有许多，然而需要指出的是：并非所有的运算都能产生这种奇妙的现象，就绝大多数而言，即便重复同一运算，所产生的结果也往往是乱七八糟、毫无规律的(即混沌的)，这有时便给人们带来另一种用途——随机数表的制造.

人们似乎在几个世纪前就已经认识到：秩序不等于定(规)律，无序不一定与无规律同义，秩序与无序后面皆有规律.研究偶然现象(无序)中的必然(规律)是概率论讨论的课题.

掷一粒骰子出现的点数是几，人们难以准确预料，尽管人们知道出现 1～6 点的可能性均为 1/6.当你记下每次投骰子得到的点数后，这些数便是人们常称的“随机数”.利用它人们可以做许多事情比如进行某些决策(当然还有其他用途).

其实对于某种数字运算同样可以产生随机数(它的效果如同掷骰子或抓阄)，说穿了这实际上产生了混沌.为了区别于真正掷骰子那样产生的随机数，人们称之为“伪随机数”.

数字“自乘取中”运算，比如给一个三位数 123，先将其自乘 $123^2=15\ 129$，然后取其中间三位数 512；再将 512 自乘再取其中间

三位数:$512^2 = 262\ 144$,取 214(这里是中心偏后,也可让中心偏前),……如此下去所得的一系列数系三位伪随机数(不过请注意:这种伪随机数的随机性将会在某数第二次出现时而终止,因为此后的数字只是前面的重复,我们当然有办法对此情况修正).

此外还有"倍积取中"运算,同余运算等亦可产生伪随机数.又如数 $\pi, e, \sqrt{2}, \cdots$ 等的展开式中的数字也是随机出现的(如果你事先并不知道这些结果的话),只不过计算它们太困难罢了.

两位随机数表

33	24	52	87	13	31	14	53	65	35	02	76	07	62	93	67	23	93	42	16
50	72	85	56	18	51	49	20	94	53	06	43	09	07	51	70	88	54	35	75
18	19	79	96	61	23	74	91	76	35	17	84	97	48	48	80	77	34	90	29
82	20	86	44	47	63	04	98	43	77	32	33	63	46	79	66	60	33	70	97
59	91	72	29	60	07	04	83	73	28	70	95	41	55	44	20	07	28	93	97
30	88	20	80	29	98	80	68	52	80	55	91	46	92	56	92	57	78	33	63
24	95	12	56	03	08	83	06	15	20	62	57	59	41	90	31	90	56	73	29
03	38	21	96	23	78	87	31	54	77	30	14	18	10	08	79	38	98	35	86

逻辑斯蒂映射

在生物学物种研究中有一个重要的数学模型——逻辑斯蒂(Logistic)模型,它涉及到一种方程,从函数观点看系称映射:

$f: x \to \alpha x - \alpha x^2$ 或 $x \to \alpha x(1-x)$,映射过程的反复实际上是方程 $\alpha x^2 - (\alpha - 1)x = 0$ 求根的一种迭代解法,迭代模式为:$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k)$.

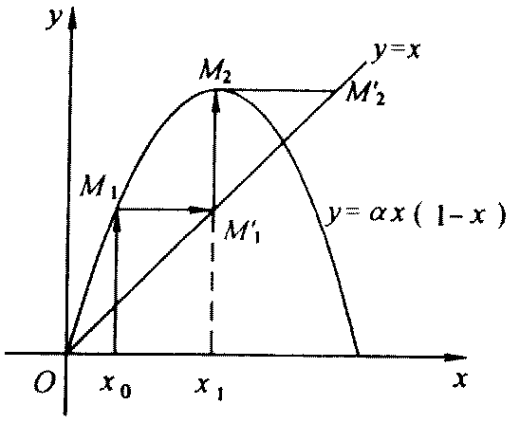
我们可任取 x_0 代入上式右端得 x_1,再将 $x_1 = \alpha x_0(1 - x_0)$ 代入右端得 $x_2, \cdots$ 如此下去,若迭代至某步有 $x_{m+1} = x_m$,显然 $x = x_m$ 是上面方程的一个根,亦称映射 $f: x \to \alpha x(1-x)$ 的一个不动点;若无论迭代多少步也未出现 $x_{m+1} = x_m$ 的情形,则须稍稍细微的讨论了,这可能出现某种循环,也可能乱七八糟毫无规律.

迭代的几何意义是:在笛卡儿坐标系中先作出 $y = \alpha x(1 -$

x)或 $y = x$ 的图象,它们分别是一条抛物线和一条直线.

从 x 轴上 x_0 出发作与纵轴平行的直线交抛物线于 M_1,它的纵坐标值为:

$y_1 = \alpha x_0(1 - x_0)$,这相当于第 1 步迭代.

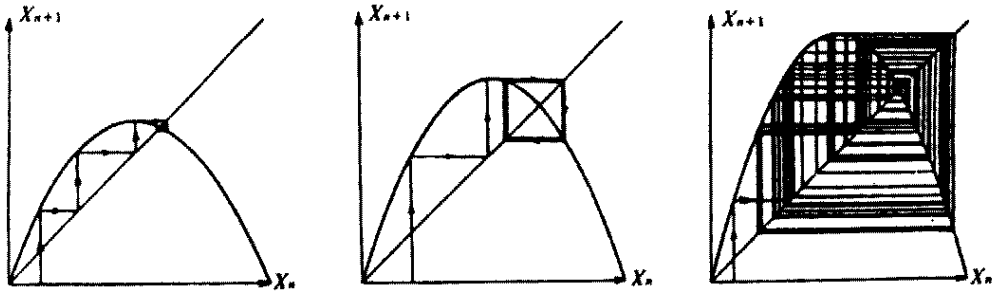


再自 M_1 作与横轴平行的直线交 $y = x$ 于 M'_1,显然 M'_1 的横坐标与 M'_1 进而与 M_1 的纵坐标值相同,即 $x_1 = y_1 = \alpha x_0(1 - x_0)$.自 M'_1 作与纵轴平行的直线交抛物线于 M_2,这时 M_2 的纵坐标值为

$y_2 = \alpha x_1(1 - x_1)$,

这实际上相当于完成第 2 步迭代.

反复迭代下去结果将如何?我们可以看到迭代的后果与参数 α 的取值有极大关系,下图给出三种不同 α 取值的迭代后果:



不动点　　周期 2　　混沌

不同参数 α 的逻辑斯蒂映射迭代图示(从左至右):定态,周期点,混沌

对于 $\alpha=2.0$ 的情形图中仅给出方程的一个根(或映射的一个不动点),其实它还有另一个根 $x=0$,不过它是"不稳定"的(若该点处斜率绝对值小于 1 为稳定的,其迭代路线是内旋的;大于 1 是不稳定的,等于 1 属中性的,其迭代路线是外旋的).

对于迭代出现周期的(即图中循环情形)情景,这时相应的即产生循环的 x 称为定态点(从系统动力学观点称为吸引子)稍细分析对于周期情况还会有下面的结果:

α 值	$3\leqslant\alpha<3.449$	$3.449\leqslant\alpha<3.544$	$3.544\leqslant\alpha<3.562$	$3.562\leqslant\alpha<3.567$
周期数	2	4	8	16

显然当 $3\leqslant\alpha<3.58$ 时随着 α 的取值增大,周期数出现翻倍现象,此称为"周期倍化".

到了 $\alpha=3.56$ 之后周期倍化现象对 α 变化极为敏感;到了 $\alpha=3.58$ 时情况却出现了"突变"——此时的迭代已乱七八糟、毫无头绪,换言之,它产生了混沌.

随着 α 的再度增大,结果竟又是一番情景:

$\alpha=3.739$ 时出现周期 5,且随 α 增大又一次出现周期倍化现象,周期依次是 10,20,40,…

$\alpha=3.835$ 时出现周期 3,同时随 α 增大周期依次变为 6,12,24,…

这样迭代随 α 变化,将出现下面的往复:

定态→周期→混沌

通过计算发现:迭代周期倍化的周期数出现极有规律,对于任何函数在其单峰区间上的迭代周期均依据下表所列数字变化模式变化:

$$3\to5\to7\to9\to11\to\cdots$$

$$\to6\to10\to14\to18\to22\to\cdots$$

$\rightarrow 12\rightarrow 20\rightarrow 28\rightarrow 36\rightarrow 44\rightarrow\cdots\cdots$

$\cdots\cdots$

$\rightarrow 3\cdot 2^n\rightarrow 5\cdot 2^n\rightarrow 7\cdot 2^n\rightarrow 9\cdot 2^n\rightarrow 11\cdot 2^n\rightarrow\cdots\cdots$

$\cdots\cdots$

$\rightarrow 2^m\rightarrow 2^{m-1}\rightarrow\cdots\rightarrow 32\rightarrow 16\rightarrow 8\rightarrow 4\rightarrow 2\rightarrow 1$

面对这些数字你也许并不觉得稀奇,可它所蕴含的东西远比数字本身来得深奥与丰富.

周期3、意味着乱七八糟

这个标题正是美国马里兰大学的约克(Yorke,J.A.)和他的学生李天岩发表在美国《数学月刊》1975年12期上一篇文章的题目.看上去也许令人摸不着头脑,其实文中介绍了下面一个事实:

任何一个一维系统里的映射,只要出现周期3,则该系统的这个映射将还有其他整数周期,甚至也能表现出乱七八糟(即混沌).

这个看上去不很复杂的结论在科学史上的价值远远超过数学本身,因为它揭示了混沌现象的某些奥秘.

当人们意识到论文的珍贵价值时始发现:此结论也曾于十几年前(1964年)为前苏联的萨尔可夫斯基(Sarkovski,A.N.)所发现,他是从不同的角度用不同的方式表达的,他的论文题目是"线段连续自映射的各周期共存"(发表在《乌克兰数学杂志》16卷).

李-约文章的结论明确地向物理学家、化学家、生物学家、经济学家……提供了下面信息:

混沌无处不在,它是稳定的,且有着自身的结构.

顺便指出:约克、李天岩的文章也是数学上第一个给出混沌

定义的,尽管当时它尚不完整.

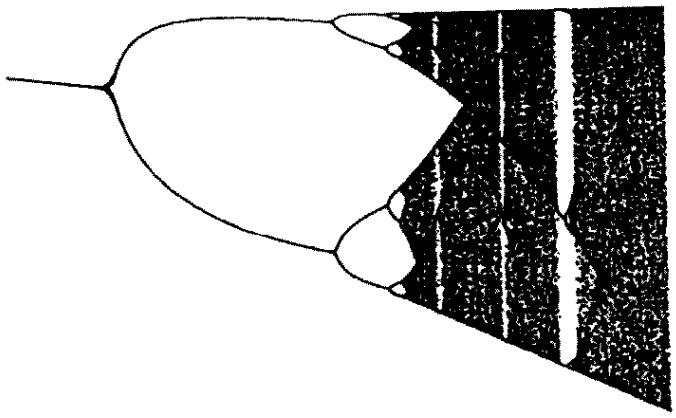
我们还想讲一句:约-李的论文虽然仅仅涉及一维映射,但结论对许多模型来讲意义依然.同时应该注意到:一维映射是现代科学中的许多理想模型最为简单的近似.这样研究一维映射的混沌表现则揭示了复杂系统的混沌范式——确定论与随机论结合的综合范式.

菲根鲍姆(Feigenbaum)常数

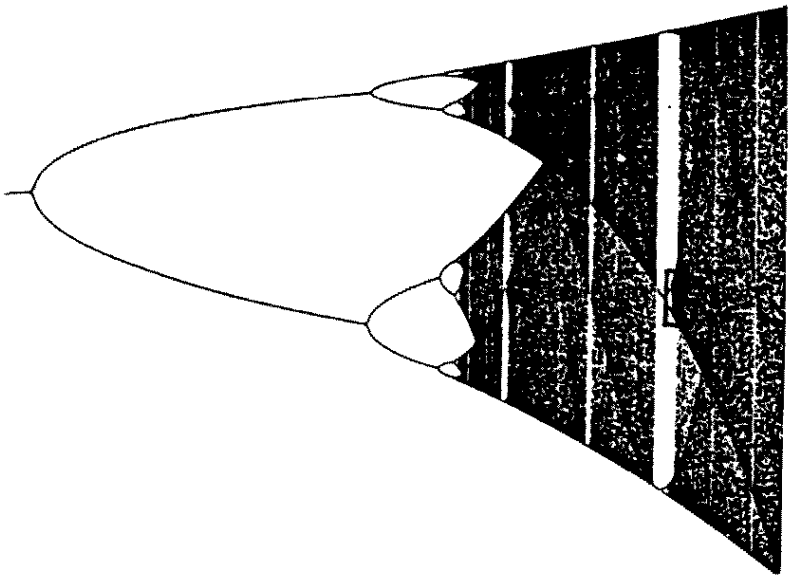
映射中的倍化周期现象还有更让人惊异的奥秘与内涵.

将前述逻辑斯蒂(Logistic)映射中的参数 α 与其映射产生的相应的不动点或定态点(吸引子)值 x 描绘在同一坐标系即 $\{O;\alpha,x\}$ 坐标系时,将会得出下边的图象,它被称为分岔图.

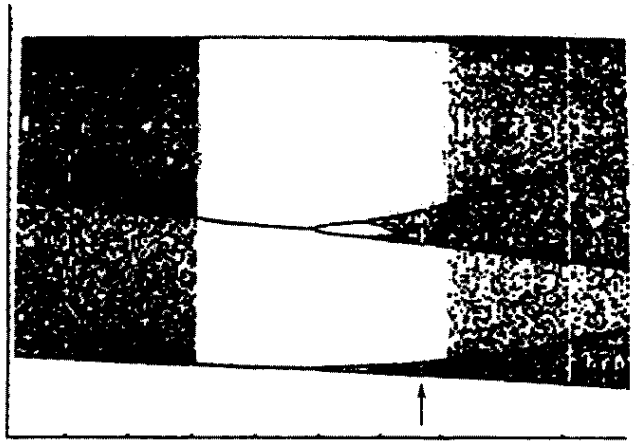
从图上亦可看到,当 $0<\alpha<3$ 时映射有惟一的(稳定的)不动点;$3\leqslant\alpha<3.449$ 时,映射有两个定态(吸引子)点(对应周期2),……等等,接下来的情形越来越复杂(从中也看到混沌现象的出现).



逻辑斯蒂映射的分岔图.常数 k 从(横坐标)2增大到4.纵坐标是状态 x.注意混沌带的生长紧随着周期倍化的现象

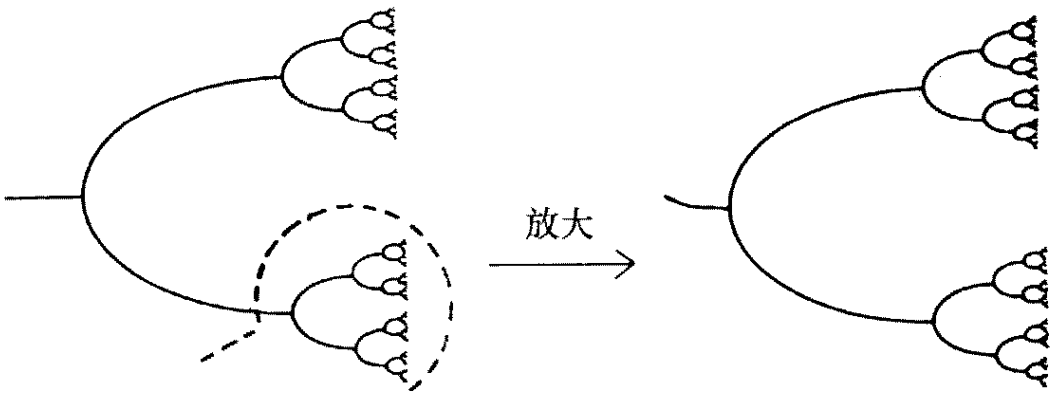


更为奇妙的是图中那些瘦长的白条(其中有少许点存在)即周期窗口处也有奥妙存在:将任一周期窗口局部放大后将是整个图形的全息再现,即放大的图像是原来图像的“克隆”.换言之,图中每个分岔图所包含的细节完完全全的是自身的缩影,即自相似.



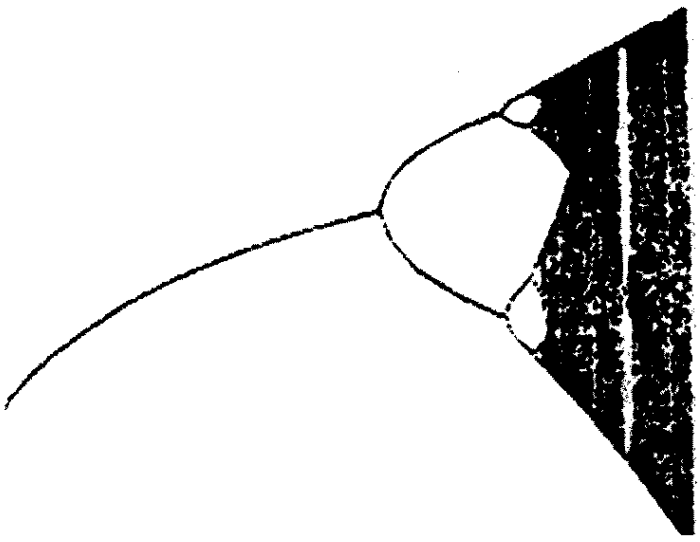
—周期窗口的放大:整个结构以缩小的方式复现.
窗口里还有窗口(箭头表示处)……

这里顺便指出一点:从前面图中我们还可以发现:周期窗口中最宽的是周期3处的窗口,这恰恰是前文所提及的李-约发现的最好切入点.

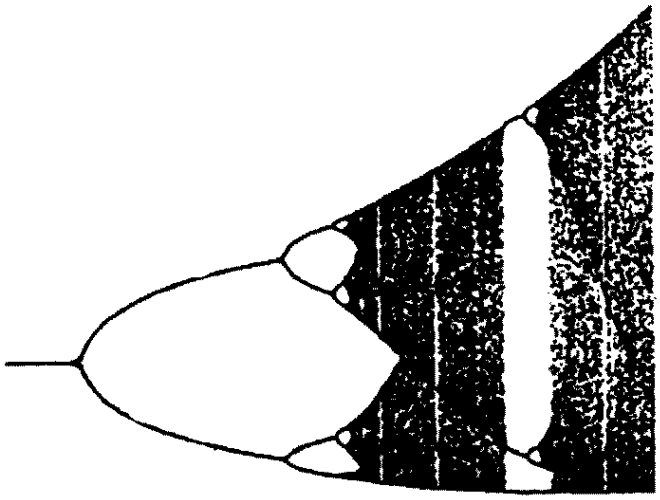


一种周期倍化现象的自相似性:在理想情况下每一芽枝的形状都与原形状相同,但尺寸缩小

倍化周期现象的逻辑斯蒂映射所绘的分岔图,对于其他单峰映射来讲也是相似的(从拓扑意义上应是相同),下面两图系映射:$x \to d\sin x$ 和 $x \to x\exp[\alpha(1-x)]$的分岔图,从图上可以清楚地看到它们的相似(这是由于映射在某个区间上的单峰性所致).



三角函数映射:$x \to \alpha \sin x$ 的分岔图



指数映射：$x \to x\exp[\delta(1-x)]$的分岔图

从“分形”理论中可以给出这类图形的维数(见“分形漫话”一节)，然而美国物理学家菲根鲍姆(Feigenbaum，M.)独具慧眼地从另外角度找出了这类分岔图形所共有的与维数相似的奥秘，且为此而得到与π、e、…一样重要的菲根鲍姆常数.

菲根鲍姆是一位物理学家，20世纪70年代初在美国洛斯阿拉斯实验室工作，他对非线性系统极感兴趣.

1975年，他在一个动力学系统报告会上听到逻辑斯蒂映射及其走向混沌的周期倍化联络.他不仅感到奇妙，同时也为这奇妙深深吸引，当他再次面对数据(见前面的数表)：

$\alpha_1 \in [3,3.449)$，$T_1 = 2$；　　$\alpha_2 \in [3.449,3.544)$，$T_2 = 4$；

$\alpha_3 \in [3.544,3.562)$，$T_3 = 8$；　$\alpha_4 \in [3.562,3.567)$，$T_4 = 16$；

……

且当他取定 $\alpha_1 = 3$，$\alpha_2 = 3.449$，$\alpha_3 = 3.544$，$\alpha_4 = 3.562$，…(α_k 为新周期变化的开始点即区间左端点值)着手下面计算时惊奇地发现：

$$\frac{3.449-3.00}{3.554-3.449} \approx 4.3, \quad \frac{3.544-3.449}{3.562-3.544} \approx 4.9,$$

它们之比(称之标度比)似乎在趋向于某个常数(这也许是凭直觉),接着算下去他果然发现上述标度比:

$$\left|\frac{\alpha_{n-1}-\alpha_n}{\alpha_n-\alpha_{n+1}}\right| \quad 或 \quad \frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}$$

越来越接近于 4.669 201 6…

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n-1}-\alpha_n}{\alpha_n-\alpha_{n+1}}\right| = 4.669\ 201\ 6\cdots$

上述结论不仅对逻辑斯蒂映射成立,对其他一维单峰映射也同样适用.其中常数 4.669 201 6…被人们誉称为费根鲍姆数.

英国著名的科普作家斯图尔特称:菲根鲍姆像一个魔术师,他从混沌大礼帽中抓出了普适性的兔子[6].

回过头来我们去思忖时会发现:说穿了,菲根鲍姆常数正是一维单峰映射分岔图中,相邻两级周期相应的参数α宽(或相邻两级周期图形横向尺寸)之比而已(从"分形"角度去考虑,这正是此类分岔图维数的变形,在那儿涉及图形面积与长度对数比).

混沌学及其未来

混沌学是一门对复杂的巨大系统现象进行整体性研究的科学.它是从紊乱中总结出条理,从无序中找到规律,把表现的随机性和系统内在的确定性进行有机结合且展现在人们面前.

混沌学的产生及发展得益于三个相互独立的学科或方向进展的汇合,它们是:①科学研究从简单模式趋向于复杂系统;②计算机科学的迅猛发展;③系统动力学研究的新观点——几何观.这里①提供了动力,②提供了技术,③提供了认识,当然你更应珍视数学的魅力,它提供了基础、工具、方法和理论依据.

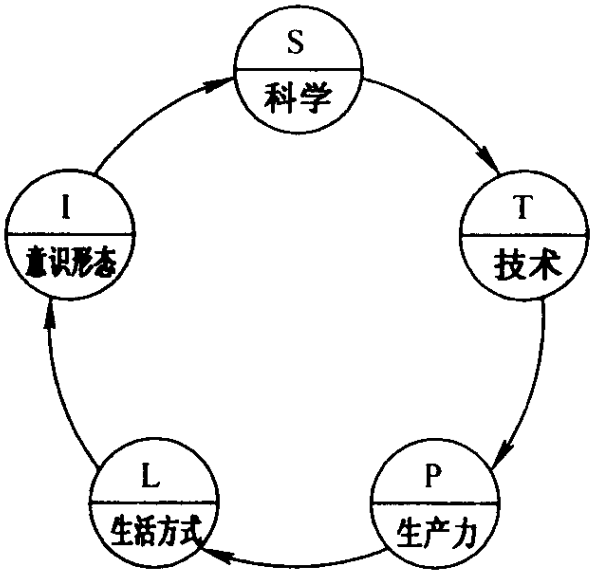
混沌学在物理上被称为继相对论和量子力学发明后的又一

次革命,它作为一门新兴学科发展如此迅猛,这首先得益于数学,由于它的加盟使得人们对整个自然界的认识更加细微、更加深邃,这也使混沌学的研究前景更加广阔.

尽管这门学科刚刚问世不久,人们却已在许多领域找到了它的应用:

日本人利用混沌原理发明了用两条混沌旋转的转臂做成的洗碗机既节水、节能,又洗洁度高;

英国人发明了利用混沌原理进行数据分析而改进矿泉水生产中质量管理的机器;



混沌学还在社会学、经济学、文学、艺术、……等诸多方面得到应用.立足于混沌动力学的社会发展科学所勾画的五元循环状混沌大迭代,是将人类社会中生产力与生产关系、上层建筑与经济基础、实践与认识等诸多哲学内涵包笼,它揭示了人类的生活方式、意识形态和科学、技术、生产力诸因素相互制约、促进、传递等的协调发展模式.

混沌学是令人振奋的,因为它开启了复杂系统得以简化的先河;混沌学是迷人的,因为它体现了数学、科学、技术的相互作用和巨大能力;混沌学是美妙的,它为人类创造了抽象美之外,

也为数学美提供了可见证据[10]；同样，混沌学也为人们带来困惑，因为它导致人们对传统的建模程序的怀疑，使人们不得不重新审视他们的方法和行为.

混沌学在我国已作为基础科学的重大项目列入发展计划和纲领中.

世界的未来是美好的，混沌学似乎也为我们做出了结论.

下篇

数学大师的失误

数学的无穷无尽的诱人之处在于，它里面最精于的悖论也能盛开出美丽的理论之花.

——戴维(Davis, P.J.)

严格性是数学的技艺，但并无绝对标准；当这门学科经历了许多年的发展之后，标准也就改变了.

——辛赫(Singh, V.)

一 老虎打盹

俗话讲:老虎也有打盹的时候.在数学中,不少大师犯下了近乎可笑的错误,这其中不少是由于他们凭借不完全的归纳和直觉所致.

然而要指出他们的错误,往往需要构造反例.

数学中,要证明一个结论需考虑所有可能与全部情况,然而要推翻一个结论仅需一个反例.

反例的寻找往往是十分艰辛的,特别是在某些情况下更是如此.

人们知道:数学中的不少发现源于不完全归纳与推断,这其中难免有讹.而凭借眼前的规律或局部的现象做出的一般决断,其不确定因素就更大,尤其是对于某些"巧合".

"数学园丁"马丁·加德纳(Cardner,M.)在其《不可思议的矩阵博士》中曾给出这样一个例子:

$$\frac{987\ 654\ 321}{123\ 456\ 789}=\overset{1}{\frown}8.\underbrace{0000000}_{7}\overbrace{729}^{3}\underbrace{00000}_{5}\overbrace{66339}^{5}\underbrace{000}_{3}\overbrace{6036849}^{7}\underbrace{0}_{1}5393\cdots$$

它的式左是由 1~9 这九个数码倒序与正序组成两个九位数之比,式右的结果令人惊讶不已:它的连续非零数字分别为 1、3、5、7 个,而连续为 0 的个数分别为 7、5、3、1.这个规律接下去成立吗?答案是否定的(用不着赘言,只需耐心将它算下去即知).

顺便讲一句:若注意到 $729=9^3\times91^0$,$66\ 339=9^3\times91^2$,$6\ 036\ 849=9^3\times91^3$,那么下式是对上述现象的诠释:

$$\frac{987\ 654\ 321}{123\ 456\ 789}=8+\frac{9}{123\ 456\ 789}=8+\frac{9^3}{10^{10}-91}$$

$$=8+9^3\times10^{-10}\sum_{k=0}^{\infty}(91\times10^{-10})^k.$$

当然,如果你知道$\frac{987\ 654\ 312}{123\ 456\ 789}=8$,则不难找出问题症结,因为$\frac{987\ 654\ 321}{123\ 456\ 789}$与它仅差$\frac{9}{123\ 456\ 789}$.

这种乍看上去似有规律,然而接下来的情况就面目全非了的例子还有.

戴维斯(Davis,P.J.)教授在文[2]中给出下面一个更加惑人的例子:

$$e^{\pi\sqrt{163}}=262\ 537\ 412\ 640\ 768\ 743.000\ 000\ 000\ 00\cdots$$

换言之式左这个数与整数262…743相差无几,甚至可以毫不夸张地说它们"相等".可是接下去的结果不再是0,然而这已经足够了.

其实,$e^{\pi\sqrt{163}}$由盖尔凡德—施辛德尔(Gelfond-Schkcider)定理知其为超越数,显然它不会是一个整数.当然这个令人困惑的现象可由现代数论中的理论给出满意的答案.

对于代数式$x=\sqrt{1141y^2+1}$来讲,当$y=1,2,3,4,\cdots$代进去,开始x都不是整数,这种僵局一直持续到

$$y=30\ 693\ 385\ 322\ 765\ 657\ 197\ 397\ 208$$

才得以扭转,换言之在差不多小于10^{25}的y来讲,均不能使$1141y^2+1$为完全平方数,即便如此,我们仍不敢断言接下来的情况亦然.

另一个类似的例子是$x=\sqrt{991y^2+1}$,第一个使x为整数的$y=12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$.

这个问题的背景是:佩尔方程$x^2-dy^2=1$,当$\sqrt{d}$的连分数

展开式有一个长周期时，则方程的第一个解特别大(此类方程解的存在性是1657年费尔马(Fermat，P.de)给出的).

上述几例人们也许能够事先预料其后(数学的理论给了我们信心与保证)，然而对于那些一时无法预决的情形则要另当别论了.

当然，如今这些验算工具可由电子计算机去代劳，即便如此，许多工作远非人们想象的那么轻松.

比如$4k+1$与$4k-1$型素数孰多问题便是如此.我们知道素数有很多种分类方法，就其形状来讲奇素数可分成$4k+1$与$4k-1$型(2是唯一的偶素数).

对于给定的k_0来讲，人们容易发现：对所有不大于k_0的k来讲，$4k-1$型素数个数不少于$4k+1$型素数个数.

k_0	1	2	3	4	5	6	…
$k\leqslant k_0$时$4k-1$型素数个数	1	2	3	3	4	5	…
$k\leqslant k_0$时$4k+1$型素数个数	1	1	2	3	3	3	…

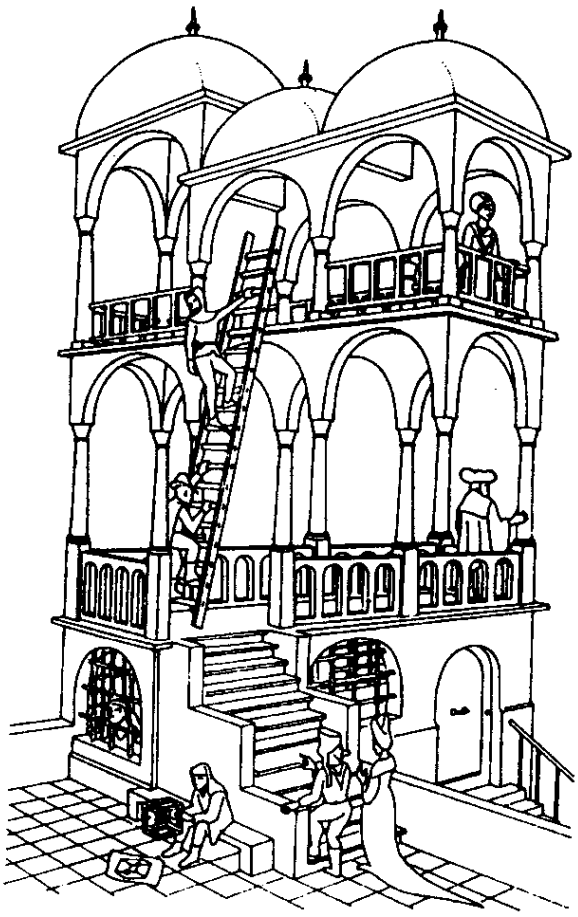
当你耐心地算下去时，一般不会发现例外，因为第一个使上述结论不成立的反例大得让人无法承受(数论专家们已经间接地证明了这一事实)，这个数大于

$$10^{10^{10^{10^{46}}}},$$

它是一个大得令人难以想像的天文数字(把它全部写下来是1000…000，假如宇宙中所有物质都变成纸，且在其每个电子上记一个0，仍然无法写完上述0中的哪怕是极少的部分).

数学——不太严格地讲——是在归纳、发现、推广中发展的，而反例在数学的发展中功不可没，它为数学的严谨性起到保驾护航作用.然而反例的发掘与拟造是一件艰辛的劳动，数学史上不少著名数学家为此做出过贡献.

有些反例是极为艰涩的,然而它们却为数学提供另一种美感,另一种发现机会.



错画——乍看上去并无不妥

1.费尔马素数公式

在前文中,我们谈到了素数表达式的寻找,这项工作必然会为数学大师们关注,与之相联的问题也就油然而生,其中不乏耐人寻味的杰作,比如:费尔马素数、麦森素数等等.

费尔马(Fermat,P.de)是16世纪法国业余数学家,他虽然一

生经商,然而却与数学有着不解之缘.

费尔马30岁起开始迷恋数学,常与当时著名数学家笛卡儿(Descartes,R.)、麦森(Mersenne,M.)等交流.他一生有过许多重要发现,如"费尔马猜想(大定理)"(现已获证见[47])、"费尔马(小)定理"等等,有趣的是他的这些成果均是记在他读过书的空白处的,当然,发掘与整理工作是在他去世之后完成的.

费尔马(Fermat,P.de)

费尔马的一些结论是凭借推理(不完全归纳)与直觉而获,因而难免会有失误.

为了寻找素数表达式,1640年前后费尔马验算了表达式

$F_n = 2^{2^n} + 1$(下称该式所给出的数为费尔马数)当 $n = 0,1,2,3,4$ 时的值分别是:

$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65\ 537$,它们均为素数,然后他便断言:

对于任何非负整数 n,表达式 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 均给出素数(数 F_n 下称费尔马数).

大约一百年后,1732年数学大师欧拉(Euler,L.)在研究这个问题时发现:

$n = 5$ 时,$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \times 6\ 700\ 417$

已不再是素数(这亦可利用下面结论证明:若 $p \mid F_m$,则 $p \equiv 1 \pmod{2^{m+2}}$,而 $641 \equiv 1 \pmod{2^7}$,且它不是费尔马数).

1880年,朗德里(Landry)指出 $F_6 = 274177 \times 67\ 280\ 421\ 310\ 721$亦是合数.

1887 年莫瑞罕德(Morehead)和魏斯坦(Western)给出一种方法,且于 1905 年始证明 F_7 是合数(它的因子直到 1971 年才为人们用连分数法且借助于电子计算机找到:

$$F_7 = 59\ 649\ 589\ 127\ 497\ 217 \times p_{22},$$

这里 p_{22} 是一个 22 位的素数).四年后,他们利用同样方法证明 F_8 是合数.

1980 年,澳州大学的布瑞特(Brent,R.P)和波拉德(Pollard)利用蒙特卡罗方法求得:

$F_8 = 1\ 238\ 926\ 361\ 552\ 897 \times p_{62}$,这里 p_{62} 是一个 62 位素数.

1990 年,美国数学家林斯特拉(Lenstra,A)和加州伯克莱分校的另一位林斯特拉(Lenstra,H.W.)等人利用数域筛法分解了 F_9(它有 155 位).

同年,布瑞特用 ECM 算法(椭圆曲线法)分解了 F_{10}(它有一个 40 位的因子)和 F_{11}.

1992 年,里德学院的克兰戴尔(Crandall,R.E.)和多尼亚斯(Doenias)证明 F_{22} 是合数.

目前人们已经证明 $5 \leqslant n \leqslant 19$ 时,F_n 均为合数,但 F_{14} 的因子却一个也未能找到.

人们迄今所发现的费尔马数中的最大合数是 F_{23471},它是 1987 年由德国汉堡大学的凯莱尔(Keller,W.)使用筛法发现的,它有 $3 \times 10^{7\,067}$ 位(它的一个因子约 7 000 位).

有趣的是:到目前为止,人们除了 F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 外,再也没有发现新的这类素数(下称费尔马素数),关于费尔马数的研究情况(截至目前为止)见下表:

n 值	F_n 研究进展
0~4	素数
5~11	找到标准分解式
12,13,15,16,18,19,21,23,25~27,30,32,38,39,42,52,55,58,63,73,77,81,117,125,144,150,207,226,228,250,267,268,284,316,329,334,398,416,452,544,556,637,692,744,931,1 551,1 945,2 023,2 089,2 456,3 310,4 724,6 537,6 835,9 428,9 448,23 471	知道 F_n 的部分因子(尚不知其全部因子)
14,20,22	知其为合数,因子不详
24,…	不知是素数还是合数

费尔马数中是否有无穷多个素数?或者有无穷多个合数?这是个至今仍然悬而未决的问题,尽管不少数论专家认为,F_4 之后的费尔马数全为合数.

关于 F_n 是否为素数的判别问题,佩平(Pepin)给出一个方法:

$$F_n \text{ 为素数} \Longleftrightarrow 3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, F_n).$$

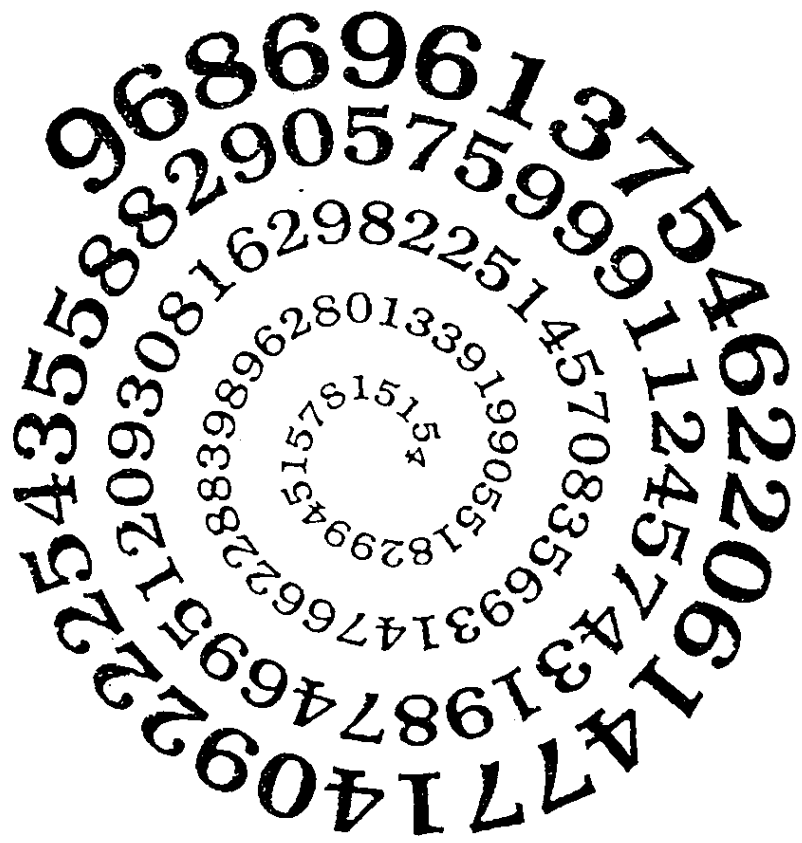
令人觉得奇妙的是:费尔马素数还与正多边形尺规作图问题有关联.

德国数学家高斯(Gauss;G.F.)19 岁时发现了下面的命题:

正 n 边形可用尺规作图$\Longleftrightarrow n \geqslant 3$ 且 n 的最大奇因子是不同费尔马素数之积.

上述命题是说:边数为费尔马素数或它们乘积的 2^k 倍数的正多边形才可用尺规作出,反之亦然.

顺便讲一句:前面提到的大数分解问题,已应用在密码研制上了(所谓公开的密码).



1994 年一些破译密码志愿者组成的小组解决了十七年来未解决的难题，成功破译了一个 128 位数字的密码，密码破译后译文为“The magic words are squeamish ossifrage”（意为：魔术的语言是易受惊的鹭兀鹰）

附录　前20个费尔马数的分解情况

m	$F_m = 2^{2^m} + 1$ 的分解
0	3
1	5
2	17
3	257
4	65 537
	（素数）
5	$641 \times 6\,700\,417$
6	$274\,177 \times p_{14}$（p_k 代表 k 位的素数，下同）
7	$59\,649\,589\,127\,497\,217 \times p_{22}$
8	$1\,238\,926\,361\,552\,897 \times p_{62}$
9	$2\,424\,833 \times 7\,455\,602\,825\,647\,884\,208\,337\,395\,736\,200\,454\,918\,783\,366\,392\,657 \times p_{99}$
10	$45\,592\,577 \times 6\,487\,031\,809 \times 4\,659\,775\,785\,220\,018\,543\,264\,560\,743\,076\,778\,192\,897 \times p_{252}$
11	$319\,489 \times 974\,849 \times 167\,988\,556\,341\,760\,475\,137 \times 356\,084\,190\,445\,833\,920\,513 \times p_{564}$
12	$114\,689 \times 26\,017\,793 \times 63\,766\,529 \times 190\,274\,191\,361 \times 1\,256\,132\,134\,125\,569 \times c_{1\,187}$（$c_k$ 代表 k 位合数，下同）
13	$2\,710\,954\,639\,361 \times 2\,663\,848\,877\,152\,141\,313 \times 3\,603\,109\,844\,542\,291\,969 \times 319\,546\,020\,820\,551\,643\,220\,672\,513 \times c_{2\,391}$
14	$c_{4\,933}$
15	$1\,214\,251\,009 \times 2\,327\,042\,503\,868\,417 \times c_{9\,840}$
16	$825\,753\,601 \times c_{19\,720}$
17	$31\,065\,037\,602\,817 \times c_{39\,444}$
18	$13631489 \times c_{78906}$
19	$70\,525\,124\,609 \times 646\,730\,219\,521 \times c_{157\,804}$

2. 哥德巴赫的另一个猜想

前文我们指出：德国数学家哥德巴赫（Goldbach，C.）以发现“哥德巴赫猜想”而闻名于数坛，正因为猜想至今尚未获证，因而

哥德巴赫的名字仍在人们视野中屡屡出现,不仅数学界,整个世界似乎都关注猜想证明的进展(猜想提出已经 260 年,且不少知名数学家为此奋斗过),因为此前困惑人们近四个世纪的费尔马猜想(费尔马大定理)已被攻克.

哥德巴赫显然是核验了不少整数后提出上述猜想,这种方法属于不完全归纳法,它虽然不能算作是一种证明方法,但它却是数学发现的重要手段.数学史上不少发现是用此方法获得的(发现之后再设法去证明它,即由猜想过渡成为定理).

哥德巴赫猜想其实是整数表为素数和问题,这在"数论"中称为"堆叠问题",这类问题还有整数表为平方数、立方数和问题等等.

哥德巴赫猜想还曾研究过别的形式的整数堆叠问题.比如他提出:

大于 1 的奇数可表为素数与一个完全平方数 2 倍之和.

如果你有耐心算下去,在小于 5 777 的奇数中是不会有例外的,然而 5 777 却是无法满足上述表示形式的反例.

美国奥克兰大学的马尔姆(Malm, D.G.)的学生发现 5 993 也是一个例外,此外他还证明(严格地讲是验证)在小于 121 000 的奇数中仅有 5 777 和 5 993 不能表示成一个素数与一个完全平方数 2 倍之和形式.

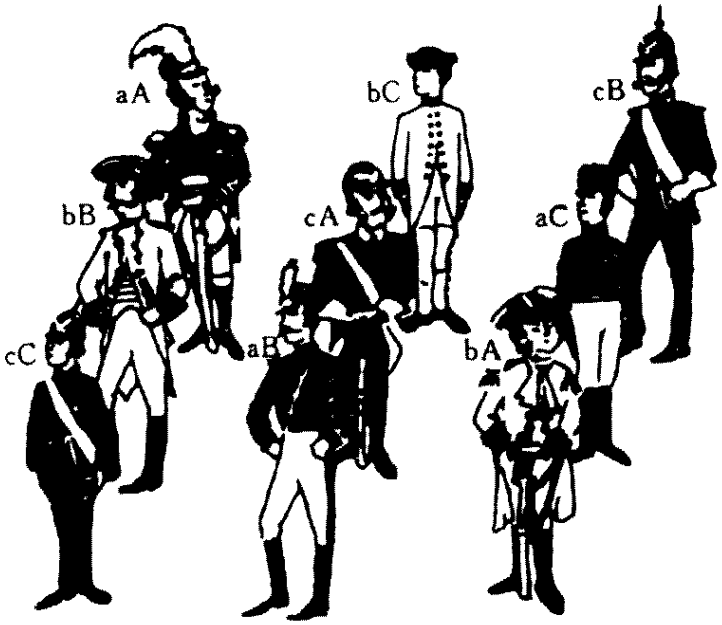
3.正交拉丁方猜想

1735 年,数学大师欧拉(Euler, L.)积劳成疾,右眼失明.他受普鲁士国王腓特烈大帝之邀,到了气候相对温和的德国,任柏林科学院物理数学所所长.

一次腓特烈大帝在阅兵仪式中问其指挥官:在一个36名军官组成的方队里,若这些军官分别来自6支不同的部队,而每支部队均有6种不同军衔的军官,他们能否排成一个6×6方队,使每行、每列既有每支部队的军官,又有不同军衔的军官?

指挥官试了许久之后感到无能为力.

问题传到欧拉那里,他开始了这个问题的研究.首先他将问题化为了用拉丁字母(或用数字)排成的方阵,且定义了拉丁方(名称由来与拉丁字母有关)——每行每列由不同元素(字母或数字)组成的 $n \times n$ 方阵.当两个 n 阶拉丁方叠合时,n^2 个有序字母或数对恰好均出现一次(因而仅出现一次),则它称为 n 阶正交拉丁方,且称两拉丁方正交.



比如下面表(1)、(2)均为3阶拉丁方,它们的迭加表(3)是一个3阶正交拉丁方(故表(1)、表(2)是正交的):

a	b	c
b	c	a
c	a	b

A	C	B
B	A	C
C	B	A

aA	bC	cB
bB	cA	aC
cC	aB	bA

欧拉首先发现:2 阶正交拉丁方不存在(容易验证).

接着欧拉构造出了 3 个 4 阶正交拉丁方,尔后他又构造出了 4 个 5 阶正交拉丁方.

Dd	Cb	Ba	Ac
Cc	Da	Ab	Bd
Bb	Ad	Dc	Ca
Aa	Bc	Cd	Db

四阶正交拉丁方

aA	cD	dE	eB	bC
dC	bB	eA	cE	aD
eD	aE	cC	bA	dB
bE	eC	aB	dD	cA
cB	dA	bD	aC	eE

五阶正交拉丁方

1779 年 3 月 8 日,欧拉向圣彼德堡科学院介绍他的正交拉丁方研究成果时,向人们展示了他构造的 56 个 5 阶约化拉丁方(即等一行、第一列为自然序的拉丁方).并指出其中可以正交的一些,但他没能找出 6 阶正交的拉丁方.于是他提出了猜想:

若 $n=4k+2$(k 为非负整数),则不存在 n 阶正交拉丁方.

1901 年丹麦数学家彼得尔堡(Petrbo)用几何方法证明 $n=6$(即 $k=1$)时欧拉猜想成立.

同年,塔瑞(Tarry)指出上述证法有误,同时他给出证明 $k=1$(即 $n=6, k=0$ 即 $n=2$ 时前已叙及)时,欧拉猜想成立(他同时指出 6 阶拉丁方有 $9\,408\cdot 6!\cdot 5!$ 个).

1910 年德国数学家维尔尼哥(Weyrnig)也给出 $n=6$ 时欧拉猜想成立的代数证法(后来有人指出其中亦有漏洞).

此后,人们对欧拉猜想笃信不移.

半个多世纪后,"不幸"的事发生了,由于印度数学家玻色(Bose,R.C.)和美国数学家帕克(Parker,E.T.)、史里克汉德(Shrikhande,S.S.)的工作(1959 ~ 1960 年)使得欧拉的猜想被推翻,他们造出了 10($k=2$ 时的 $n=4k+2$)阶正交拉丁方(起初他们指出了 22 阶正交拉丁方存在,稍后美国数学家帕克又证明 14 和 26 阶正交拉丁方存在.不久玻色等人给出了 10 阶正交拉丁方).见下表:

Aa	Eh	Bi	Hg	Cj	Id	If	De	Cb	Fc
Ig	Bb	Fh	Ci	Ha	Dj	Je	Ff	Ac	Gd
Jf	Ia	Ce	Gh	Di	Hb	Ej	Fg	Bd	Ae
Fj	Jg	Ib	Dd	Ah	Ei	He	Ga	Ce	Bf
Hd	Gj	Ja	Ic	Ee	Bh	Fi	Ab	Df	Cg
Gi	He	Aj	Jb	Id	Ff	Ch	Be	Eg	Da
Dh	Ai	Hf	Bj	Jc	Te	Gg	Cd	Fa	Eb
Be	Cf	Dg	Ea	Fb	Hc	Ad	Hh	Ii	Jg
Cb	Dc	Ed	Fe	Cf	Ag	Ba	Ij	Jh	Hi
Ec	Fd	Ge	Af	Bg	Ca	Db	Ji	Hj	Ih

十阶正交拉丁方

此后玻色等人又成功地证明了:

当 $n\neq 2$ 或 6 时,n 阶正交拉丁方皆存在.

问题解决后,人们又把目光移到了别处.比如若用 $N(n)$ 表示 n 阶互相正交的拉丁方个数,则有:$N(n)\leqslant n-1(n\geqslant 2)$.据此穆兰(Mullen)又提出了猜想[3]:

$N(n)=n-1$ 当且仅当 n 是素数幂时.

(当费尔马猜想获解之后,有人称它为下一个费尔马猜想[3].)

当人们把正交拉丁方概念拓广到三维空间时:

$n \times n \times n$ 的立方体每小块分别写有 $0,1,2,\cdots,n-1$ 使得每行、每列、每竖中恰好都出现一次,便称之为 n 阶立体(三维)拉丁方.

迭合三个 n 阶立体(三维)拉丁方时,若每个有序三重数对:$000,001,002,\cdots,\overline{n-1}\ \ \overline{n-1}\ \ \overline{n-1}$ 均出现一次,则称它为 n 阶立体(三维)正交拉丁方.

令人意想不到的是:三维 6 阶正交拉丁方却存在(阿尔金(Arkin,J.)施密斯(Smith,P.)和斯特拉斯(Straus,E.G.)给出).这个 6 阶正交拉丁方的六层数字分别为:

Ⅰ

313	435	241	522	000	154
402	541	350	014	133	225
534	050	423	105	242	311
045	123	512	231	354	400
151	212	004	340	425	533
220	304	135	453	511	042

Ⅱ

201	353	415	134	542	020
330	422	501	245	054	113
443	514	030	351	125	202
552	005	143	420	211	324
024	131	252	513	200	445
115	240	324	002	433	551

Ⅲ

455	221	333	040	114	502
521	310	442	153	205	034
010	403	554	222	331	145
103	532	025	314	440	251
232	044	111	405	553	320
344	155	200	531	022	413

Ⅳ

120	504	052	315	431	243
213	035	124	401	540	352
302	141	215	530	053	424
434	250	301	043	122	515
545	323	430	152	214	001
051	412	543	224	305	130

V

032	140	524	203	355	411
144	253	015	332	421	500
255	322	101	444	510	033
321	414	230	555	003	142
410	505	343	021	132	254
503	031	452	110	244	325

Ⅵ

544	012	100	451	223	335
055	104	233	520	312	441
121	235	342	013	404	550
210	341	454	102	535	023
303	450	525	234	041	112
432	523	011	345	150	204

正交拉丁方在统计、组合设计、模拟和数值积分等问题中均有广泛应用.

欧拉(Euler, L.)

附记 拉丁方的计数问题(个数问题)是件繁杂的工作,就连所谓约化拉丁方(第一行元素恰好为 $a, b, c, d, \cdots$ 顺序排列的拉丁方)个数 L_n(这里 n 表示拉丁方的阶数)计算起来也并非易事,但人们也算得一些值,比如:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
L_n	1	1	1	4	56	9 408	16 942 080	535 281 401 856

n	9	10
L_n	377 597 570 964 258 816	7 580 721 483 160 132 811 489 280

此外 $L_{11} \approx 5.36 \times 10^{33}$，$L_{12} \approx 1.62 \times 10^{44}$，

$L_{13} \approx 2.51 \times 10^{56}$，$L_{14} \approx 2.33 \times 10^{70}$，

$L_{15} \approx 1.5 \times 10^{86}$.

4.欧拉方程猜想

1769 年欧拉(Euler,L.)证明了费尔马方程

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad \text{(费尔马大定理的特例)}$$

无非平凡整数解后,也提出另一个猜想:

方程 $x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{n-1}^n = x_n^n (n \geqslant 4)$ 无正整数解.

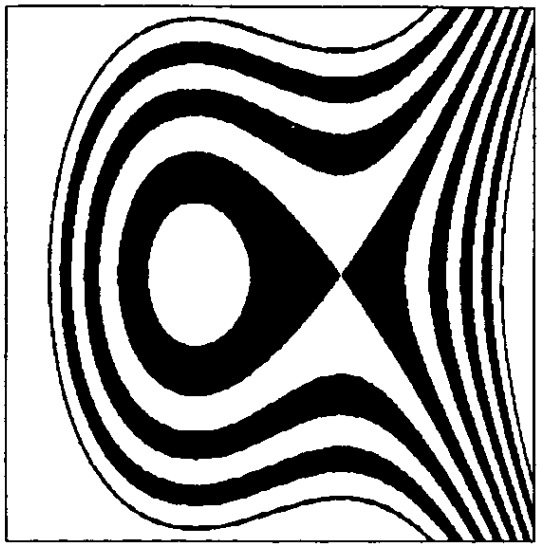
猜想提出后 200 年无人给出反例.两个世纪之后,美国数学家塞夫林格(Selfridge)和美籍华人吴子乾发现:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

(又一说此式系 1966 年兰德尔(Lander,L.J.)和帕尔金(Parkin,T.R.)通过电子计算机找到的),这便否定了欧拉的上述猜想(此前即 1911 年诺瑞(Norrie,R)曾发现:$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4$,但它却不是欧拉猜想的反例).

对于 $n = 4$ 的情形,长期以来人们均未能给出个说法,然而 1987 年情况有了转机,美国哈佛大学的埃尔克斯(Elkies,N.)借助于椭圆曲线理论给出下面的等式:

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4.$$



三次曲线图象

尔后，福瑞格(Frge,R.)给出另一个更小的反例：

$$95\ 800^4 + 217\ 519^4 + 414\ 560^4 = 422\ 481^4.$$

又丢番图方程 $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ 有无穷多组(非平凡)解，比如郑格于得到：

$$\begin{cases} a = 2st(s^2 + t^2)u^2, \\ b = 2st(s^2 - t^2)u^2, \\ c = (s^4 - t^4)u^2, \\ d = [16s^4t^4 + (s^4 - t^4)^2]u^4. \end{cases}$$

此外对于 $n \geqslant 6$ 的情形，塞夫林格还给出下面等式：

$$74^6 + 234^6 + 402^6 + 474^6 + 702^6 + 1\ 077^6 = 1\ 141^6,$$

$$12^7 + 35^7 + 53^7 + 58^7 + 64^7 + 83^7 + 85^7 + 90^7 = 102^7.$$

但这些仍不是欧拉猜想的反例，有人还猜测：

$n \geqslant 6$ 时，$x_1^n + x_2^n \cdots + x_{n-1}^n = x_n^n$ 没有正整数解.

这个问题至今未获解，也无人给出反例.

5.堆球问题

法国数学家鲁卡斯(Lucas,E.),曾执教于巴黎高等学校,在数论和不定分析上颇有见树.他曾将斐波那契(Fibonacci,L.)数列

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots\cdots$$

推广,即任意正整数 a,b,定义:

$$L_0 = a,\ L_1 = b,\ L_{k+1} = L_{k-1} + L_k(k \geqslant 1)$$

为 Lucas 数列.

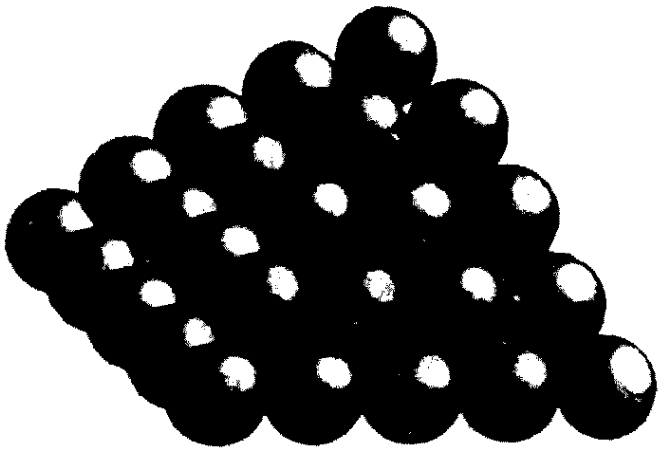
鲁卡斯还于 1878 年给出判断麦森(Mersenne,M.)数

$$M_p = 2^p - 1(p \text{ 为素数})$$

是否是素数的方法,且由此证明 $M_{127} = 2^{127} - 1$ 是素数,这在当时是人们所认识的最大素数(结果保持了 75 年).

此外他还提出"配偶夫妇团坐问题":n 对夫妇围圆桌而坐,规定两女士中间坐一男士,且无任何男士与其夫人相邻,求坐法总数.

1875 年鲁卡斯向《新数学年鉴》提出问题:



用球(原问题为炮弹)堆成正四棱锥(各层数分别为 1,4,9,

16,25,…),整个锥体所堆球数不能是整数平方(完全平方数).

换言之,方程(m,n 是整数)

$$1^2+2^2+3^2+4^2\cdots+n^2=m^2 \quad (*)\text{无解}.$$

即 $$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=m^2 \quad \text{无解}.$$

次年,勃兰克(Blanc,M.)给出一组解:

$$n=24,m=70,$$

且证明了这组解的惟一性,但这个证明不完整,其中的漏洞被鲁卡斯于 1877 年发现.

解的惟一性问题直到 1918 年才由瓦特松(Watson,C.N.)利用椭圆函数理论给出了一个严格证明.

1952 年里君瑞(Ljunggren)给出一个较初等的证明:

1975 年卡纳戛萨巴帕蒂(Kanagasabapathy)用丢番图方程组

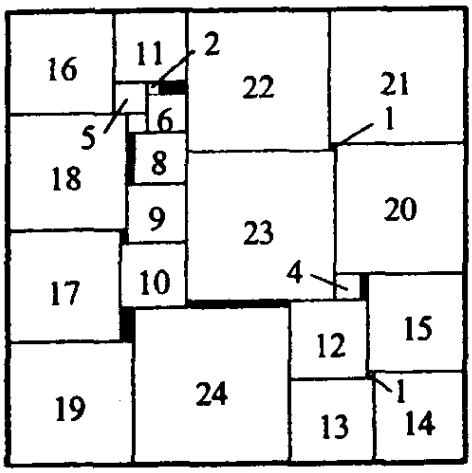
$$\begin{cases}3x^2-2=y^2,\\8x^2-7=z^2,\end{cases}$$

的解,给出鲁卡斯方程($*$)有惟一解的一个初等证法.

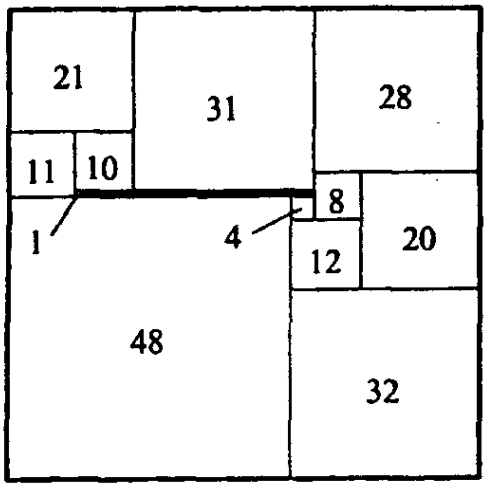
由 $1^2+2^2+3^2+\cdots+23^2+24^2=70^2$,我们不由想到完美正方形问题,从上式看出:

边长分别为 1 ~ 24 的正方形面积和恰好与一个边长为 70 的正方形面积相等,我们总想这样一个问题:边长为 70 的正方形,可否恰好剖成边长为 1,2,…,23,24 的小正方形(或者用边长分别为 1 ~ 24 的小正方块去无重叠、无缝隙地盖住边长为 70 的大正方形)?

至今为止最好的答案是大正方形剖成 23 块(即用了 24 块小正方块中的 23 块去覆盖大正方形,见下图):



其中仅剩下总面积为49(图中恰好没有边长为7的正方形)的5小条,人称其为"拟完美正方形".下面是另一块拟完美正方形,它仅有一条未被盖住(这个问题我们前文已有叙述).



6.分圆多项式

前文我们已经叙及,1796年高斯(Gauss,G.F.)证明了:若 F_n 是素数,则正 F_n(包括其 2^k 倍)边形可用尺规作出.这类问题还涉及所谓分圆多项式问题,前苏联学者契巴塔廖夫(Чеботарев,Н.Г.)考察下述诸式的分解:

$$x-1=x-1$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

……

请注意:式右的诸因式中各代数式系数绝对值均为 1.于是契氏便猜测:

将 x^n-1 分解为不可约整系数多项式后,各项系数绝对值不超过 1(注意缺项的系数为 0).

当 n 是素数时上述结论获证.

对 $n<105$ 时人们也未发现意外,但依万诺夫(Иванов, В. К.)却指出 $x^{105}-1$ 有既约因子:

$$x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1,$$

这儿 x^7 和 x^{41} 项的系数均为 -2,此例显然推翻了契巴塔廖夫猜想.

一个自然的想法是:为何反例在 $n=105$ 出现? 这是一个令人思考的疑团.

分圆问题从某种角度看还与所谓本比巴赫(Beiberbach)猜想有关.

1916 年德国数学家本比巴赫(Beiberbach, L.)猜测对单位圆($|z|<1$, z 为复数)有幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$(其中 $a_1=1$)的单叶解析函数 $f(z)$,其系数 $|a_n|\leqslant n \quad (n=2,3,\cdots)$.

$n=3,4,5,6$ 的情形先后被人们证得.

1925 年英国数学家立特伍德(Littlewood,J.E.)证得:

$|a_n| \leqslant en$,其中 $e=2.71828\cdots$

以后上界系数从 e 陆续改进到 1.0643(1983 年中国数学家任福尧等证得).

1984 年美国数学家勃朗日(Brange,L.de.)彻底解决了该问题.

7.双随机阵猜想及拓广

范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B.L.)荷兰数学家.1903 年生于阿姆斯特丹,且于阿姆斯特丹大学毕业,曾先后在哥廷根大学、莱比锡大学、苏黎世大学任教.

他在代数、代数几何、群论、数理统计等领域皆有贡献.

他的名著《代数学》的出版,是抽象代数创立的标识,在国际数学界赢得广泛声誉.此外他的《数理统计学》在数学界甚有影响,重要著作还有《群论与量子力学》等.

他关于双随机阵曾有一个著名的猜想.

在"概率论"中,特别是在离散的马尔科夫(Марков,А.А.)链的研究中,常会遇到所谓双随机矩阵.

若一个方阵 A 的元都是非负的,且各行和、各列和均为 1,则 A 被称为双随机矩阵.

双随机矩阵有许多有趣的性质,其中关于双随机矩阵的积和式,有一个十分著名的直到不久前才被证明的猜想——Van der Waerden 猜想,它是这样叙述的:

若 A 是一个 n 阶双随机矩阵,则

$$\text{per } A \geqslant n!/n^n. \qquad (*)$$

其中等号当 $A = J_n/n$ 时成立.(Van der Waerden 猜想)

这里 per A 为矩阵 A 的积和式,所谓 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的积和式是指:

$$\text{per } A = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{mi_m}.$$

其中 $(i_1, i_2, \cdots, i_m)$ 为 $(1,2,\cdots,m)$ 的任一排列,上式是对其中不同排列求和.

又 J_n 为 n 阶全 1 矩阵(其全部元素皆为 1 的矩阵).

依据 Van der Waerden 猜想有人提出更强的猜测(它涉及到两个双随机矩阵):

若 A, B 均为 n 阶双随机矩阵,则

$$\text{per}(AB) \leqslant \min(\text{per}A, \text{per}B) \qquad (**)$$

注意到在(**)中取 $B = J_n/n$ 即可得到(*).

遗憾的是(**)并不成立,琼卡特(Jurkat, W.B.)给出了下面的反例:

$$A = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 11 & 5 & 8 \\ 13 & 11 & 0 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{per } A = \frac{3\,804}{13\,824} < \text{per}(AB) = \frac{3\,840}{13\,824}.$$

另外还有人试图给出 Van der Waerden 猜想的改进:

若 A 是 n 阶双随机矩阵,则

$$\text{per}(AA^T) \leqslant \text{per}A. \qquad (***)$$

由"A 是对称的半正定的 n 阶双随机矩阵,则 per $A \geqslant n!/n^n$,其中等号当且仅当 $A = J_n/n$ 时成立"定理,我们可以看出:若(***)成立则可推出(*)式来,即(*)是(***)的推论.

同样令人失望的是:(***)也不成立.纽曼(Newman, M.)给出

下面的反例：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix},\quad AA^{\mathrm{T}}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\1&0&1&2\end{pmatrix},$$

但　$\operatorname{per}(AA^{\mathrm{T}})=9/64>\operatorname{per}A=8/64$.

上述两个较强的猜测(＊＊)和(＊＊＊)虽然被否定了，这似乎动摇了人们对 Van der Waerden 猜测成立的信心，可是许多较弱的结果的成立，又在支持人们对 Van der Waerden 猜想成立的信念，更何况推翻这个猜想的反例人们也一直未能得到.

Van der Waerden 猜想引起许多数学家们的重视，且由此引起人们对矩阵积和式的研究，同时相应地提出了许多有关的猜想.

比如 1963 年闵克(Minc)提出关于 per(A)的上界猜测：

$$\operatorname{per}(A)\leqslant\prod_{i=1}^{n}(r_i!)^{1/r_i},$$

这里 A 为 n 阶(0,1)矩阵，其各行元素之和分别为 r_1、r_2、…、r_n.

1973 年，这一猜测为布鲁曼(Bregman)证得.

上述猜测还与拉丁方计数问题有密切联系，由范·德·瓦尔登和闵克猜想可证明：n 阶拉丁方的个数 L_n 满足：

$$\frac{(n!)^{2n-1}}{n^{n^2}}\leqslant L_n\leqslant\Big[\prod_{k=1}^{n-1}(k!)^{\frac{1}{k}}\Big]^n.$$

然而人们迄今已知道的 L_n 的下界为：

$$L_n\geqslant n!\ (n-1)!\ (n-2)!\ \cdots 1!.$$

8.院士的失误

1900 年，德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)在第二届国际数

学家大会上作了题为“数学问题”的报告，他站在当时数学研究的最前沿，高瞻远瞩地提出了预示20世纪世界数学发展方向的23个数学问题，其中的第十六问题*关于微分方的部分是：求方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q_n(x,y)}{P_n(x,y)} \qquad (E_n)$$

的极限环的最大数目和位置，其中 P_n，Q_n 是 x，y 的 n 次多项式.

这个问题引起很多数学工作者的关心，不少人作了许多不懈的努力，但进展较为缓慢，甚至对二次系统（P_n，Q_n 是二次多项式时）研究也是如此，今记 $H(n)$ 为方程 E_n 的极限环的最大数目：

1955年，苏联科学院院士彼德洛夫斯基（Петровский，Н.Г.）与拉金斯（Лаплис，Е.М.）曾声称他们证明了 $H(2)=3$.

1956年，莫尔恰诺夫（Молчанов）再次肯定 $H(2)=3$.

1965年，切尔卡斯（Черкас）也肯定 $H(2)=3$.

1967年，拉金斯和彼德洛夫斯基发表声明，指出他们文章中的一个引理证明有误，但仍声称 $H(2)=3$.

1966年，美国人库皮尔（Coppel）；1975年，皮尔克（Perko）等多次怀疑上述结论，但他们没有能提出确切的意见.

1979年，我国学者史松龄及南京大学教师陈兰荪和王明媛都分别给出了反例——二次系统（E_2）出现至少四个极限环的例子.史松龄的例子是：

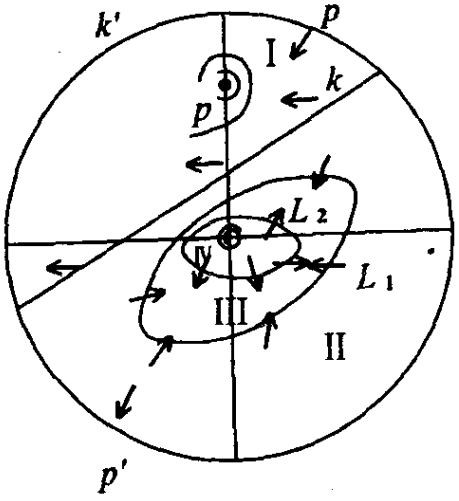
---

* 希尔伯特第十六问题是关于代数曲线和曲面的拓扑问题.哈尔纳克（Harnack）曾确定了 n 阶平面代数曲线所具有的闭孤立分枝的最大个数，希尔伯特希望进一步研究它们的相对位置，以及相应地研究空间代数曲面的叶的最大个数、类型和相对位置.近年来这方面取得了不少重要结果.该问题的后半部分即是要讨论微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{Q_n}{P_n}$ 的极限环的最大个数和相对位置.

数值系数的二次系统：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda x-y-10x^2+(5+\delta)xy+y^2,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x+x^2+(-25+8\varepsilon-9\delta)xy,\end{cases}\qquad(*)$$

其中 $\lambda=-10^{-250},\varepsilon=-10^{-70},\delta=-10^{-18}$，可作出四个庞加莱－本迪克森(Poincare′-Bendixson)环域(见图)，使每个里至少存在一个极限环，因而 $H(2)\geqslant 4$.



9.波利亚问题

波利亚(Pólya,G.)美籍匈牙利裔数学家，1887 年 12 月生于匈牙利布达佩斯.

中学时代已显现其突出的数学才能，大学毕业后在瑞士苏黎世的联邦理工学院任教.1940 年移居美国先后在布朗、斯坦福大学任教.

他在函数论、变分学、数论、组合数学等诸多领域皆有重要贡献.

名著《数学与猜想》、《数学的发现》、《怎样解题》等皆出自他

之手.

此外还写有《不等式》、《数学分析中的问题和定理》、《数学物理中的等周不等式》等专著.

1963 年美国数学会为表彰其对数学的贡献授予他“功勋奖”,1968 年获数学物理荣誉奖.

此外,他先后当选美国国家科学院院士和法国科学院通讯院士.

1919 年在苏黎世瑞士联邦工学院任教的波利亚曾就整数的素因子个数问题进行过研究,同时他提出了下面的问题(猜想):

若 n 是自然数,记 r 为 n 的素因子个数(包括重数),且规定:$n=0$ 时 $r=0$,n 为素数时 $r=1$.

又记 O_x 为不超过 x 的、有奇数个素因子的正整数个数;记 E_x 为不超过 x 的、有偶数个素因子的正整数个数.

则当 $x\geqslant 2$ 时,$O_x\geqslant E_x$.又记 $L(x)=E_x-O_x$,则 $L(x)\leqslant 0$,且 $L(x)=\sum_{k=1}^{x}\lambda(k)$,$x>1$,这儿 $\lambda(k)=(-1)^r$(即 Liouville 函数).

人们验算了 $x\leqslant 50$ 的全部情形无一例外.

1958 年哈塞格拉夫(Haselgrove, C. B.)证明了有无数多个 x 使 $L(x)>0$,尽管他未能指出这种 x 到底是什么样子,但这却推翻了波利亚的问题猜想.

四年之后的 1962 年,莱赫曼(R. S. Lehman)发现:

$$L(906\ 180\ 359)=1,$$

成为否定波利亚问题的第一个具体的反例.

1980 年,田中(Tanaka, M.)发现:$x=906\ 150\ 257$ 是使问题不成立的最小反例.

二 成功之母

1.麦森素数与完全数

前面我们曾经说过:在寻找素数表达式的漫长过程中,麦森素数堪称又一重要数类.

麦森(Mersenne,M.)法国业余数学家,原本是一位神父,但他酷爱数学,因而数学成了他的第一业余爱好.他的著名发现是由研究素数表达式时而引起的.

1644年(即在他逝世前四年)在他的《物理学与数学有的深思》中向世人宣称:

当 $p=2,3,5,7,13,17,19,31,61,127,257$ 时,2^p-1 是素数(下记 M_p,且称它们为麦森数,其中素数称麦森素数).

(显然,若 n 是合数,则 2^n-1 亦是合数;反之 n 是素数,2^n-1 未必是素数.)

此后人们发现麦森上述结论有误(据称,麦森本人仅验算了表中的前七个).

1903年科尔(Coll)发现 $p=67$ 时,M_{67} 不是素数(他是在一次科学报告会上披露的,他仅算出 $2^{67}-1$ 和它的分解式 193 707 721 × 761 838 257 287,便赢得经久不息的掌声,因为他否定了麦森的一个结论),但是人们却发现 $p=61$ 时,即 M_{61} 是素数(麦森落掉了).

1911 年鲍维尔(Power, R.E.),又发现 M_{89} 是素数.三年后他又发现 M_{107} 亦为素数(麦森漏掉了两个素数).

1922 年克拉依奇克(Kraitchik, M.B.)指出 M_{257} 不是素数.这件事曾在波兰数学家斯坦因豪斯 20 世纪 50 年代出版的名著《数学一瞥》中这样记述(极富挑战性):

七十八位数 $2^{257}-1=23\ 158\ 417\ 847\ 432\ 390\ 847\ 141\ 970\ 017\ 375\ 815\ 706\ 539\ 969\ 331\ 281\ 128\ 078\ 915\ 168\ 015\ 826\ 259\ 279\ 871$ 是合数,可以证明它有因子,尽管人们尚未找到它.

(它的因子直到 1984 年初才由美国桑迪国家实验室的科学们家找到,它们是:27 271 151, 178 230 287 214 063 289 511, 61 676 882 198 695 257 501 367, 1 207 039 617 824 989 303 969 681)

这样麦森素数表应修正为:$p=2,3,5,7,13,17,19,31,67,89,107,127$ 时,$M_p=2^p-1$ 是素数(共 12 个).

当然 $p=2,3,5,7,13,17,19,31$ 时 M_p 是素数的证明系由数学大师欧拉(Euler, L.)于 1775 年完成的.而 M_{127} 是素数的验证则是法国数学家鲁卡斯(Lucas, A.) 完成的(它有 39 位,具体值为:170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727)

计算机出现之前,验算麦森素数是一项十分艰苦的工作,仅凭手算,人们难免会有差错.电子计算机出现之后情况得以好转,它为人们寻找麦森素数带来方便与希望.

1953 年 6 月,美国国家标准局的数学家鲁滨逊(Robinson)等利用 SWAC 计算机一举找出五个新的麦森素数:

$$M_{521},\quad M_{607},\quad M_{1\,279},\quad M_{2\,203},\quad M_{2\,281}.$$

此后的 42 年间,即截至 1995 年人们利用大型电子计算机又先后找到 17 个麦森素数(至此总共找到 34 个),发现时间及发现者资料见下表:

编　号	年　份	数　的　发　现　者	p　值	M_p 位数
18	1957	Riesel, H.	3 217	969
19	1961	Hurwitz, A.	4 253	—
20	1961	同上	4 423	1 332
21	1963	Gillies, D.B.	9 689	—
22	1963	同上	99 41	—
23	1963	同上	11 213	3 376
24	1971	Tucherman, B.	19 937	6 002
25	1978	Noll, L.C.等	21 701	6 533
26	1979	同上	23 209	6 987
27	1979	Nelson, H.等	44 497	13 395
28	1982	Slowinski, D.	86 243	25 962
29	1988	Colquitt, W.N.等	110 503	—
30	1983	Slowinski, D.	132 049	39 751
31	1985	同上	216 091	65 050
32	1992	同上	756 839	227 832
33	1993	同上	859 433	258 716
34	1995	同上	1 257 787	378 632

顺便讲一句:上述发现多运用鲁卡斯 - 拉赫曼(Lucas-Lehmer)原理进行,它是说:

Lucas 数列:$L_0 = 4, L_1 = L_0^2 - 2 = 14, L_2 = L_1^2 - 2 = 194, \cdots, L_n = L_{n-1}^2 - 2, \cdots$中的项 L_{p-2}若能被 $2^p - 1$ 整除,则 $2^p - 1$ 即为素数.

随着 p 的增大,验算 M_p 的工作越来越艰难,纵然人们已研究出每秒可计算数百亿次的大型电子计算机,并已发现许多先进的计算方法(如快速富利叶变换).

20 世纪 90 年代初,当因特网(Internet)在世界掀起热潮且广泛应用之际,有人提议利用 Internet 上极为丰富的个人电脑资源来寻找新的更大的麦森素数.

短短两年多,"Internet 麦森素数大搜寻"(英文缩写 GIMPS)

已硕果累累:人们又找到三个新的麦森素数:

$M_{1\,398\,269}$(1996 年末)、$M_{2\,976\,211}$ 和 $M_{3\,021\,377}$(1998 年 1 月找到,它有 909 526 位,系美国加州大学的学生克拉克森(Clarkson)所为).

上世纪最后一个麦森素数是由哈吉拉瓦拉(Hajratwala)、沃特曼(Woltman,G.)和库洛夫斯基(Kurowski,S.)于 1999 年给出的:

$$2^{6\,972\,593}-1\ (\text{它有 } 2\,098\,960 \text{ 位})$$

新世纪之初,2001 年 11 月 4 日卡麦伦(Cameron,M.)和沃特曼、库洛夫斯基又找到一个更大的麦森素数:

$$2^{13\,466\,917}-1\ (\text{它有 } 4\,053\,946 \text{ 位}).$$

至此,人们已找到 39 个麦森素数.

有人预言:到 21 世纪初,人们可把 M_p 的搜索工作推进到 $p<10^6$.

麦森素数的搜寻不仅仅视为一种计算机游戏(它是计算机软硬件水平的综合评判),其自身背景有着深刻的历史渊源.

两千多年前古希腊学者欧几里得(Euclid)在其《几何原本》中有这样的段落:

在自然数中,恰好等于其全部真因子(包括 1)和的数叫"完全数".

如 6,28,496,…等均为完全数(由于完全数少之又少,曾使尼可马库斯感慨道:"世界上善和美廖廖可数,恶和丑却比比皆是).完全数有许多奇妙的性质,比如:

(1)完全数是 2 的连续方幂(指数相继)和,比如:

$6=2^1+2^2$, $28=2^2+2^3+2^4$, $496=2^4+2^5+2^6+2^7+2^8\cdots$

(2)除 6 之外,它们是相继奇数的立方和,比如:

$28=1^3+3^3$, $496=1^3+3^3+5^3+7^3,\cdots$

此外,欧几里得还给出完全数的判定法则:

若 2^p-1 为素数,则 $(2^p-1)2^{p-1}$ 是完全数.

我们容易看到:上述所讲完全数皆为偶数,人们称之为"偶完全数".这实际上告诉我们:

找到一个 2^p-1 型素数,即找到一个偶完全数,而 2^p-1 型素数恰好为麦森素数.因而可以这样讲:发现一个麦森素数,即相当于找到一个偶完全数.

如此一来,人们至少已找到 39 个偶完全数.

我们或许会问:偶完全数是否都是 $2^{p-1}(2^p-1)$ 型? 回答是肯定的.

1730 年数学家欧拉(Euler,L.)证明了下面结论:

偶完全数必可表为 $2^{p-1}(2^p-1)$ 形状,其中 p 与 2^p-1 皆为素数.

至此人们终于发现:麦森素数与偶完全数一一对应着,这也许正是人们(包括麦森本人)不惜花大气力去寻找麦森素数的另一个因由.

有无奇完全数若存在? 这是一个至今尚未被解开的谜.不过人们对于奇完全数的研究有了一些结果[5],比如有人证明:

若奇完全数存在,则它是 $12m+1$ 或 $36m+9$ 型整数.

1976 年有人宣称:若奇完全数存在,则它将大于 10^{36}.

1989 年布瑞特(Brent,R.P.)等人指出:若奇完全数存在,则它须大于 10^{160}.1990 年下限已增至 10^{300}.

此外,布兰斯坦(Brandstein,M.S.)还指出:奇完全数若存在,它的最大因子大于 5×10^5;哈吉斯(Hagis,P.)指出,奇完全数的第二大因子大于 10^3.

有人发现,若将 22 021 看作素数(但它不是素数),则

$$3^2\cdot7^2\cdot11^2\cdot13^2\cdot22\,021$$

是一个奇完全数,显然这是假完全数.

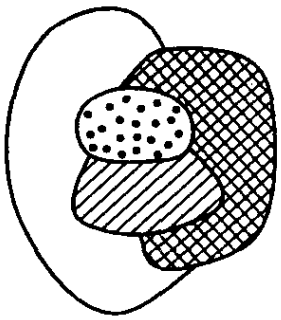
尽管看上去奇完全数存在的可能越来越渺茫,但人们仍无

法肯定它不存在,这也正是奇完全数存在与否的研究魅力所在.

2.失败,但留下了方法

前文我们提到了“四色猜想”的提出以及它最后由电子计算机完成的证明,那儿的证明正是对一位数学家证明的修补.

1878 年凯莱(Cayle,A.)在伦敦数学家大会上报告中谈到了四色猜想,问题吸引了不少人.



至少要四种颜色的地图

转年,律师出身的英国人肯普(Kempe,A.B.)给出了猜想的第一个证明.

又过一年(1880 年),泰特(Tait,P.G.)也给出了一个证法.

正当人们对于猜想逐渐淡忘之际,1890 年年仅 29 岁的英国数学家希伍德(Heawood,P.J.)的七页长论文指出了肯普证明中的漏洞,虽然如此希伍德认为:肯普的构想与方法极有价值.

又过了 56 年(1946 年)加拿大数学家塔特(Tutte,W.T.)指出了泰特证明的漏洞.

然而几十年来,虽然不少人试图弥补两人在证明上的漏洞,然而所有努力都没有成功.

希伍德试图弥补漏洞工作的努力虽然未能成功,但他运用了肯普的方法证明了“五色定理”:

平面或球面上的地图仅需五种颜色便可将所有区域区分开.

人们在解答四色猜想问题时意识到:能用数学语言描述的问题,应该能用数学思想解答,尽管哥德尔(Gödel,K.)指出数学

中存在不可解问题,但四色猜想不属此列.

沿着肯普的思路,1936 年起德国汉诺威大学的学者海西(Heesch,H.)开始研究不可避免集内可约构形数目问题,到 1950 年他估计出构形数目约有 10 000 个,且将问题转化电网移动电荷问题处理.

1976 年美国伊利诺斯大学的哈肯(Haken)和阿贝尔(Appel)在不可避免集中构形数从 1 936 个缩至 1 482 个的情形下,在 IBM360 计算机上用了1 200小时,终于证明了四色定理(同年 6 月在《美国数学会通报》上宣布).

1977 年论文在美国《伊利诺斯数学杂志》上发表,全文长 139 页.

同年,有人宣布一个简单的机器证明,历时约 50 个小时机上时间.

尽管如此,数学家们仍对该证明存在疑虑,他们在试图寻找猜想的非机器证明,即用纯逻辑推导方法证明,然而百余年来虽有不少人努力尝试,到目前为止尚未找到有效方法.

3.议员席位分配难题

美国宪法第 1 条 2 款写道:"众议院议员名额据各州人口比例分配".该条款自 1788 年生效以来,关于"按人口比例"的分配原则,一直成为政治家与数学家们争论的焦点.

美国乔治·华盛顿(Washington,J.)时代的财政部长哈密顿(Hamilton)于 1790 年提出解决国会议员席位分配方法,且于 1792 年被美国会通过.其具体内容是:

设有 S 个州,每州人数为 p_i,国会议员总数为 n,则令 $q_i=$

$n\left(\frac{p_i}{\sum_{i=1}^{s} p_i}\right)$，显然 $\sum_{i=1}^{S} q_i = n$.

令 $r_i = q_i - [q_i]$，这儿[·]表示取整，且将 r_i 由大到小依次排列.

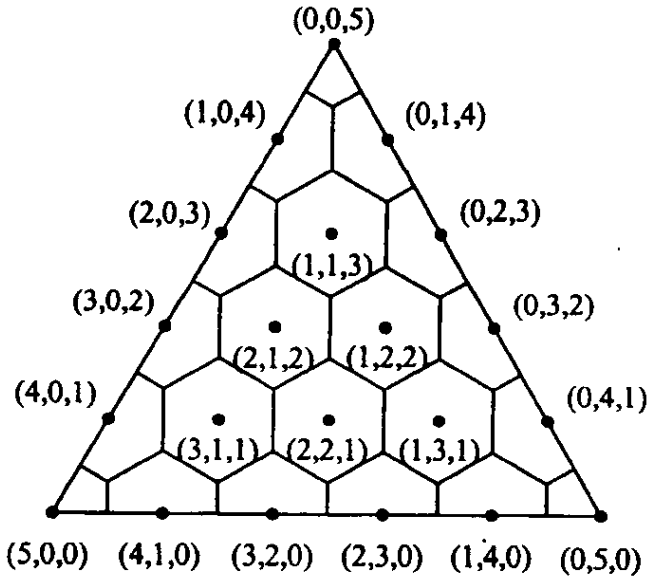
先分配各州$[q_i]$个名额，然后将余下的名额 $n - \sum_{i=1}^{S} [q_i]$（它小于 S）依 r_i 大小依次分配给各州一名，直至分完为止.

这种分配方案与常理不悖、且十分合理（从几何角度考虑，它是符合对称美的）.

然而阿拉巴马（Alabama）却给出一个例子（实则是一个悖论）说明该方法的欠妥.例子是：

起初的分配预案是20个名额，具体数据及分配结果见下表：

州　别	人　数	所占比例	按比例分配名额	实际应分名额
A	103	0.515	10.3	10
B	63	0.315	6.3	6
C	34	0.17	3.4	4
总　和	200	1	20	20



哈密顿法名额分配域

但是当分配名额增加 1 个，而各州人数未曾变动时，分配结果出人意外，见下表

州　别	人　数	所占比例	按比例分配名额	实际应分名额
A	103	0.515	10.815	11
B	63	0.315	6.615	7
C	34	0.17	3.570	3
总　和	200	1	21	21

换言之，当议员名额增加 1 个时，*C* 州分配名额不仅没有增加反而减少 1 个.

此例揭示了哈密顿方法的缺陷，因而人们不得不寻找其他令人满意的分配方法.

为此数学家们不得不重新审视传统的分配方法，譬如有人提出：合理的分配应使分配方案中票数与人数比例差额之和尽量小者为佳.

例如按 11，7，3 分配剧票，上述“差和”为：

$$\left|\frac{11}{103}-\frac{7}{63}\right|+\left|\frac{7}{63}-\frac{3}{34}\right|+\left|\frac{11}{103}-\frac{3}{34}\right|\approx 0.0458.$$

而若按 11，6，4 分配剧票，上述“差和”为：

$$\left|\frac{11}{103}-\frac{6}{63}\right|+\left|\frac{6}{63}-\frac{4}{34}\right|+\left|\frac{11}{103}-\frac{4}{34}\right|\approx 0.0448.$$

后者小于前者，相比较而言后者分配方案似更合理些（这时当然不会再有前述“怪异”现象产生）.

此外，还有其他一些方法如霍廷顿（Hahtinton）法等. 1974 年巴林斯基（Balinsky，M. L.）和杨（Young，H. P.）对此问题建立了五条公理：

公理 1（人口单调性）某州人口增加不会导致其失去名额.

公理 2（无偏性）在整个时间上平均，每州应得到它应分摊的份额.

公理 3(名额单调性) 总名额的增加不会减少任一个州的名额.

公理 4(公平分摊性) 任何州的名额都不会偏离其比例的数额数.

公理 5(接近份额性) 无州际间名额转让会使该两州都接近于它们应得的份额.

1982 年,两人证明:不存在满足公理 1 ~ 5 的名额分配方法.

4.十三球问题

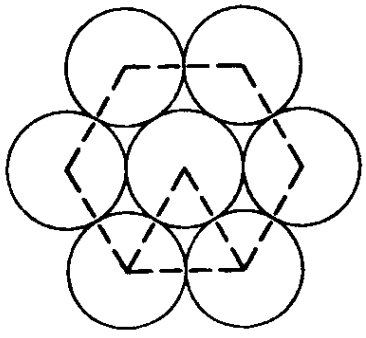
1611 年,著名天文学、物理学、数学家开卜勒(Kepler,J.)提出如下猜想:

在一个立方体中放置同样大小的一些小球,无论如何放,全部小球所占体积与立方体体积之比不会超过 $\pi/\sqrt{18}$.(Kepler 猜想)

这是一个至今尚未获证的、又貌似不难的问题.其实他是在考虑球的堆积问题时提出的.

1694 年英国天文学家格雷高里(Gregory,D.)与大科学家牛顿(Newton,I.)在讨论星球在天空中如何分布又提出如下问题:

一个球能否与 13 个与之同样大小的球都相切?(Newton - Gregory 猜想)



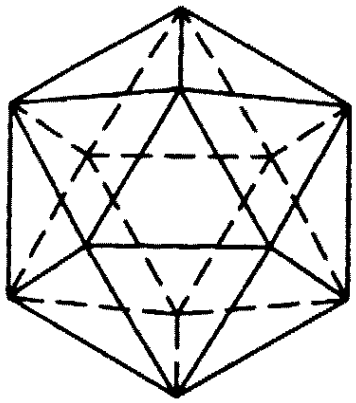
牛顿认为"不可以",而格雷高里认为"办得到".

谁是谁非?由此引来一番争论.

我们知道:平面上一个圆最多可与六个与之相等的圆都相切,它的结论与证明均不困难(见左图).

然而问题推广到三维空间,圆推广到球之后,问题变得相对复杂多了.

平面圆相切问题,当你想到正六边形之后,问题便可迎刃而解(正六边形六个顶点恰好是六个等圆的圆心,正六边形边长恰好是等圆的直径).

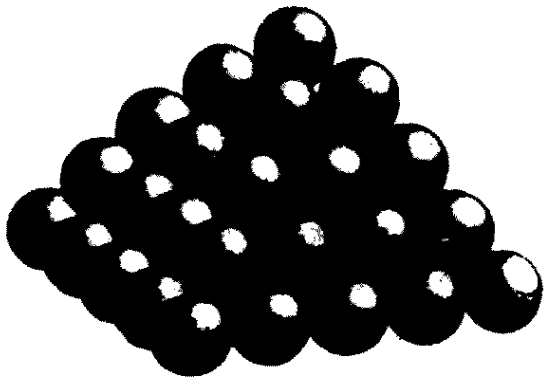


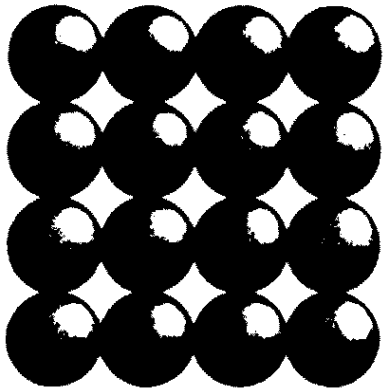
学过立体几何的读者也许会立即想到正 20 面体(它有 12 个顶点、20 个面,每个面皆为彼此全等的正三角形),它可以内接于一个球.

试想:正 20 面体的 12 个顶点皆在其外接球面上,它可看作外接球与 12 个等球相切的切点(经过不太复杂的计算可以证明这办得到),这其实证明了:

一个球(至少)可与 12 个与之相等的球都相切.

当然,我们也可以这样去想像:将一些同样大小的球一层一层地堆起来:第 1 层(最上层)放一个球,第 2 层放 4 个球,第 3 层放 9 个球,第 4 层放 16 个球.这时,第 3 层最中间的球既与上一层的 4 个球都相切,也与下一层 16 个球中的 4 个球都相切,同时还与同一层其余 8 个球中的 4 个球相切,这即是说:该球可与 12 个球相切.





第 4 层

有趣的是在讨论可否与13个球相切的问题时,答案却姗姗来迟——大约300年后,许特和范·德·瓦尔登(Van der Waerden, B.L.)于1953年给出结论否定的严格证明.1956年加拿大的利奇又给出一个较为简捷的证法,换言之:

一个球至多可与12个与之同样大小的球相切.

人们还把上述结论推广到了更高维空间.

显然,开卜勒猜想是一个整体问题,而牛顿-格雷高里猜想则是一个局部问题,然而它们之间又有着密切的联系,人们在研究它们的过程中也开创了一门崭新的数学分支——离散几何,该几何在许多领域均找到了广泛的应用,比如人们在研究金刚石晶体结构时,发现了其具有超凡硬度的缘由,再如人们还将此理论用到了密码通讯中.

5.方程 $x^xy^y=z^z$ 的整数解

素有神童、数字情种美称的美籍匈牙利裔数学家爱尔特希(Erdos,P.),近60年的数学生涯中,发表(独著或与人合作)论文1475篇,堪称之最.这些文章不仅数量惊人,而且质量不凡.

上世纪30年代他在一篇文章中猜测:

方程 $x^xy^y=z^z$(*)除了平凡得 $y=1,x=z$ 外,无其他整数解.

它的另一种叙述即:

方程 $x^xy^y=z^z$ 没有 $x>1,y>1,z>1$ 的整数解.

1940年我国数学家柯召否定了这个猜想,且找到了该方程的无穷多组解,其中前三个是:

x	12^6	224^{14}	61440^{30}
y	6^8	112^{16}	30720^{32}
z	$2^{11}\cdot 3^7$	$2^{68}\cdot 7^{15}$	$2^{357}\cdot 15^{31}$

它的一般情形是：

$$\begin{cases} x = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+2n}(2^n-1)^{2(2^n-1)}, \\ y = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)}(2^n-1)^{2(2^n-1)+2}, \\ z = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+n+1}(2^n-1)^{2(2^n-1)+1}, \end{cases} \tag{**}$$

这里 $n>1$.

此外柯召还证明了：当 x,y 互素即 $(x,y)=1$ 时，方程(*)无正整数解.

之后，人们对此又提出问题：(**)式是否给出了前述方程的全部解？

1959 年米尔斯(Mills, W. H.)证明：当 $z^2 \leqslant 4xy$ 时，式(**)给出了方程的全部解.

1984 年米田(Uchiyama, S.)证明：当 $z^2 > 4xy$ 时，方程最多只有有限多个整数解.

他们的工作给人们的感觉是柯召给定了问题(*)的全部(非平凡)解.

尔后，柯召等还将问题(*)作了推广，且证明：

方程 $\prod_{k=1}^{m} x_k^{x_k} = z^z\ (m\geqslant 3, x_k>1)$(***)有无穷多组解.

对于 $m=3$ 的情形他们得出的解是：

$$x_1 = 3^{3^n(3^{n+1}-2n-3)+2n}(3^n-1)^{2(3^n-1)},$$

$$x_2 = 3^{3^n(3^{n+1}-2n-3)}(3^n-1)^{2(3^n-1)+2},$$

$$x_3 = 3^{3^n(3^{n+1}-2n-3)}(3^n-1)^{2(3^n-1)+1},$$

$$z = 3^{3^n(3^{n+1}-2n-3)+n+1}(3^n-1)^{2(3^n-1)+1},$$

这里 n 为正整数.特别地当 $n=1$ 时,即 $x_1=3^{14}\cdot 2^4$, $x_2=3^{12}\cdot 2^6$, $x_3=3^{13}\cdot 2^5$, $z=3^{14}\cdot 2^5$ 为方程 $x_1^{x_1}x_2^{x_2}x_3^{x_3}=z^z$ 的一组解.

对于一般的 m,方程(***)的解为:

$$x_1=m^{m^n(m^{n+1}-2n-m)+2n}(m^n-1)^{2(m^n-1)},$$

$$x_2=m^{m^n(m^{n+1}-2n-m)}(m^n-1)^{2(m^n-1)+2},$$

$$x_3=x_4=\cdots=x_m=m^{m^n(m^{n+1}-2n-m)+n}(m^n-1)^{2(m^n-1)+1},$$

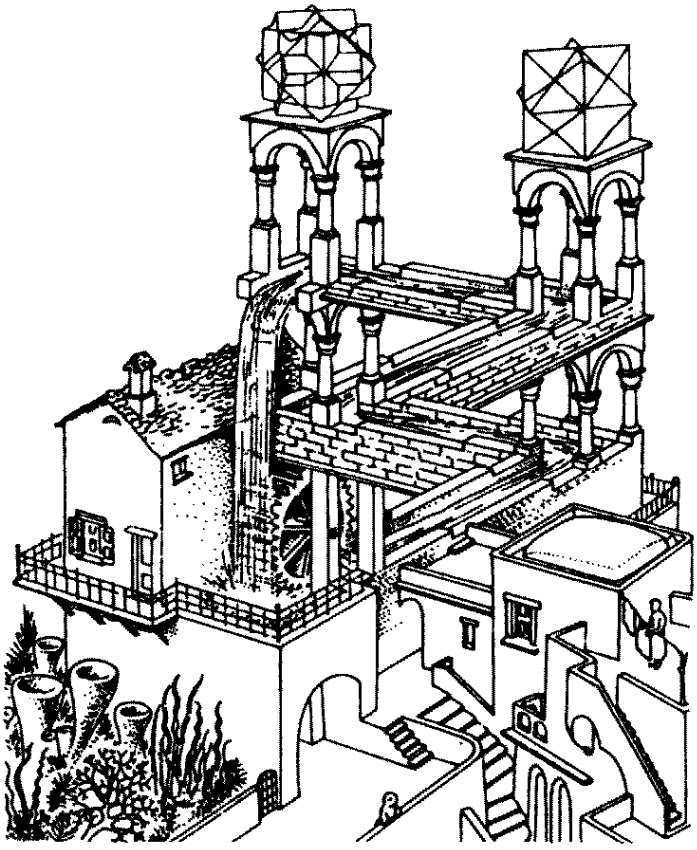
$$z=m^{m^n(m^{n+1}-2n-m)+n+1},$$

这里 $m\geqslant 3$ 时 $n>0$,而 $m=2$ 时 $n>1$.

丘德瑞(Chouclhry,A.)对 $m=3$ 时也给出一个参数解.

但上述问题有无奇数解?问题尚不得知.

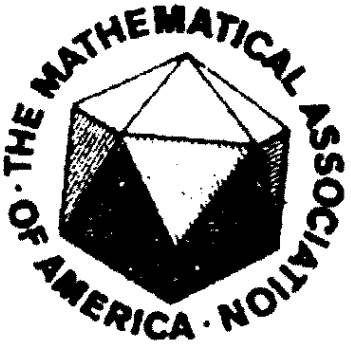
三 瑕不掩瑜



一幅错画导致了“永动机”的“发明”

1.会徽上的失误

美国数学会是一个拥有两万多名会员的组织(学术团体),在世界上影响较大.

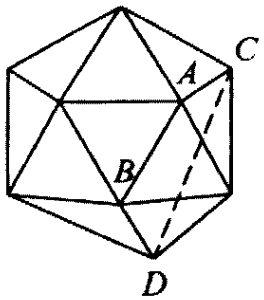


1924 年刊载的会徽

新的会徽

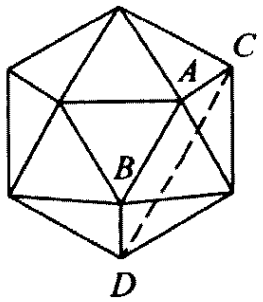
1924 年美数学会会刊《美国数学月刊》创立，创刊号上刊登了美国数学会会徽，这是一个以正 20 面体为主旨的图案，几十年来人们对它的权威性从未怀疑过.

上个世纪 80 年代初，美国华盛顿大学的布兰高·格林鲍华从当时民主德国的一枚邮票上，发现票面图案中的正 20 面体图案有误：正 20 面体原本有一个基本特点：同一平面内的棱或交于一点或彼此平行，但邮票上的图案不是那样.



错误的画法

（图中 CD 与 AB 不平行）

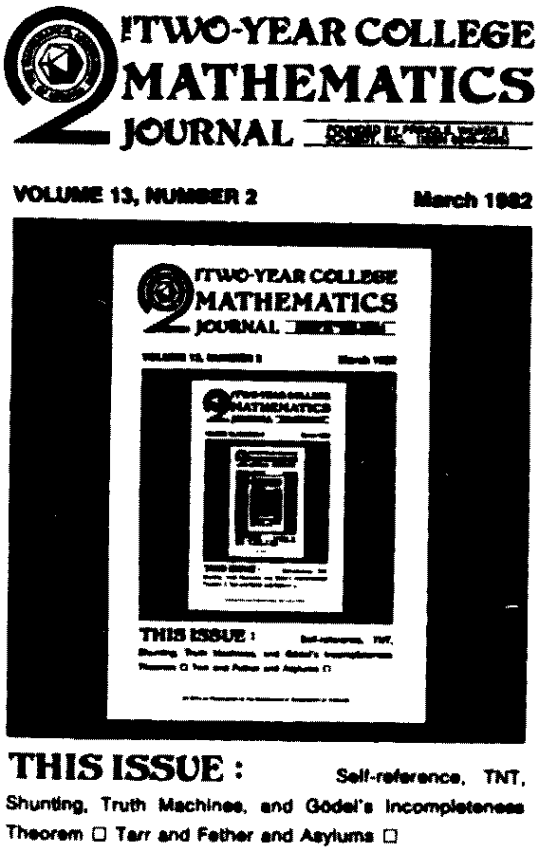


正确的画法

（图中 CD 与 AB 平行）

格氏立刻想到美数学会会徽上的图案，看后他不禁惊呆了，数学会的会徽上的图案，竟然绘错了，更令人不解的是：它居然错了五十多年而无人发现.

当他将问题指出后，美数学会终于将会徽图案作了修正.



美国数学会刊物

2.挑战贝尔曼原理

在最优理论中有一个著名的重要基本原理——贝尔曼(Bellman)原理,它用“图论”的语言可表述为:

最短路的后部子路必是最短的.

(原理原意:作为整个过程的最优策略而言,无论过去的状态与决策如何,对前面决策所形成的状态而言,余下的诸决策必构成最优策略)

贝尔曼(Bellman,R.E.)美国数学家,应用数学的开拓人之一.

第二次世界大战期间从军且为军事研究作出过贡献.战争

结束后,1946 年回普林斯顿大学继续学业,且获博士学位.

1950 年,贝尔曼着手决策分析中多阶段决策问题研究,提出了应用数学重要组成部分的"动态规划"数学技巧(1957 年《动态规划》一书出版为标志),创立了"运筹学"的一个重要分支,也使得某些复杂的数学规划(或决策)问题取得突破性进展.为此他获得美国数学会和 SIAM 颁发的首届维纳应用数学奖.

贝尔曼原理也一直是最优化方法的最重要、最基本的理论支柱.

然而该原理并非普适.1982 年我国运筹工作者胡德强拟造一个反例以示贝尔曼原理的局限性,他的例子简述如次:

考虑下图所示网络,且定义路长 $\triangleq \sum$ 弧长(mod 10):

$$Ⓢ \xrightarrow[9]{1} ① \xrightarrow[9]{1} ② \xrightarrow[9]{1} ③ \xrightarrow[9]{1} \cdots \xrightarrow[9]{1} ⑦ \xrightarrow[9]{1} ⑧ \xrightarrow[9]{1} Ⓣ$$

显然由 S 到 T 的最短路由上图中的全部下弧组成,因为

$$\sum_{\text{上弧}} 1(\text{mod } 10) = 9.$$

$$\sum_{\text{下弧}} 9(\text{mod } 10) = 1.$$

然而该最短路的后部子路却并非最短:比如从结点⑦到 T,走上弧(定义)路长为 2,走下弧(定义)路长为 8.

1988 年范明给出一个更一般的例子.

顺便讲一句:尽管如此,贝尔曼原理在优化理论中的地位并未因此而动摇,换言之,它仍是该理论中的一个重要原理.

原因是:在人们社会实践中,上述例子不会出现,这也许是数学家们在"鸡蛋里挑骨头",然而正因为此才会使得数学天衣无缝、无懈可击.

数学是严谨的,纵然你在生活中不会遇到那类"病态"的例子,但正由于它的存在也迫使数学家们不得不重新审视他们的

结论,甚至每一个细节.

3.错了66年

前文我们曾介绍过哈密顿(Hamilton,W.R.)周游世界问题:

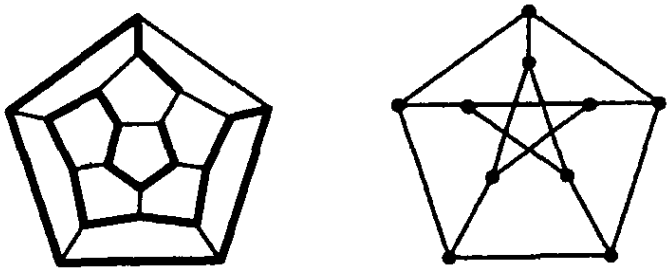
地球上20个城市,每个城市皆与其相邻的三城市间有航线.他能否从某地出发游完每个城市后再回到出发点?

若这种路线存在,人们称之为哈密顿回路或哈密顿圈.

《图论》中人们又定义了Hamilton圈:

给定一个图 G,又 μ 是 G 中的一个圈,若 μ 经过 G 中每个点一次且仅仅一次,则称 μ 为Hamilton圈,简称 H 圈.

下图(1)中粗边构成的圈(哈密顿周游问题中的解)是一个 H 圈;图(2)称Petersen图,图中没有 H 圈.



如何判断某个图中有无 H 圈,英格兰数学家泰特(P.G.Tait)曾给出一个定理.

泰特1831年4月生于英格兰,毕业于剑桥大学,师从哈密顿.曾执教于贝尔法斯特、爱丁堡大学等.

他在行列式理论、级数理论、函数论和数论等领域皆有贡献.他还简化了和发展了哈密顿创立的四元数理论.

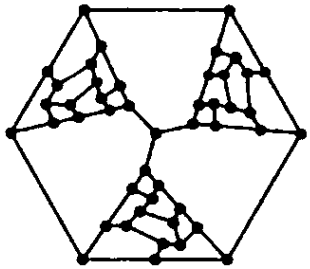
1880年,泰特在研究"四色问题"时,曾提出如下Tait猜想:

每个三点连通的3正则平面图都有 H 圈.

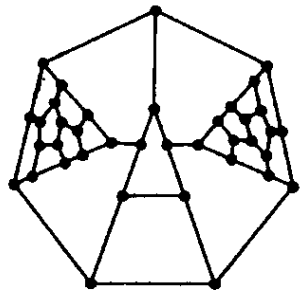
66 年后，1946 年图特(Tutte，W.T.)给出一个 46 阶(即 46 个顶点)的反例，否定了泰特猜想(见下左图).

1968 年，戈林勃格(Grinberg，E.Ja)发现了平面图有 H 圈的一个必有条件，且由此得到关于泰特猜想的更多反例.

迄今为止，关于泰特猜想的反例，最小阶数(顶点数)为 38 阶(见下右图).



46 阶的反例



38 阶的反例

顺便讲一句：1956 年图特证明了：

任一个四点连通平面图均有 H 圈.

1983 年汤姆森(Thomassen，C.)进一步证明了：

每个四点连通平面图是 H 连通图.

4.经典大作中的小瑕疵

已故数学家华罗庚教授的《数论导引》是闻名中外的数论经典(科学出版社 1957 年初版)，该书第五章“素数分布之概况”中讲述了下面的一个事实：

> 晚近 Beeger 算出
>
> $$B(n) = n^2 - n + 72491$$
>
> 当 $0 \leqslant n \leqslant 11000$ 时皆为素(质)数.

(iv) 又

3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31; …; 101, 103; …;

10 016 957, 10 016 959; …; 10^9+7, 10^9+9; …

皆爲差爲 2 之素數對. 更切實些, 已知小於 100 000 者有 1 224 對, 小於 1 000 000 者有 8 164 對. 目下所知最大素數對是

1 000 000 009 649, 1 000 000 009 651.

此類數字資料趣味: 差爲 2 之素數對可能有無窮對. 此亦一未嘗解決的問題. 切實言之, 在數論之研究中能趣味之推測, 常較能解決者爲多. 又如

5, 7, 11; 11, 13, 17; 17, 19, 23; …; 101, 103, 107;

…; 10 014 491, 10 014 493, 10 014 497; …

皆爲素數, 由此趣味, 是否有無窮個素數 p 使 $p+2$, $p+6$ 皆爲素數. 更進一步:

(v) 已知

$$n^2-n+17$$

當 $0<n<16$ 時皆爲素數, 又

$$n^2-n+41$$

當 $0<n<40$ 時皆爲素數. 晚近 Beeger 算出

$$n^2-n+72491$$

當 $0<n<11000$ 時皆爲素數. 此確立一極有趣味之問題: 任與一數 N, 可否求出一數 p, 當 $0<n<N$ 時, 使

$$n^2-n+p$$

常爲素數.

此亦一未解決之問題. 由著者觀之, 其困難較 (iii) 及 (iv) 更甚. 設若此問題已經解決, 則 (iv) 亦迎刃而解也. 何則? 多項式 n^2-n+p 最多祇當 n 由 0 到 $p-1$ 時爲素數. 今往作一系列多項式 n^2-n+p_i, 具有次之性質: 當 $0<n<p_{i-1}$ 時, n^2-n+p_i 常爲素數. 故若問題 (v) 已解決, 則此種作法實爲可能. 命 $n=1$ 及 2, 則 p_i, p_i+2 皆爲素數. 又命 $n=1, 2, 3$, 則 p_i, p_i+2, p_i+6 皆爲素數. 是以本問題如能解決, 則問題 (iv) 立刻解決.

《数论导引》1957 年版第 89 页

近 20 年过去无人对此产生质疑.然而意外的事发生了:

上世纪 70 年代初有人指出:

$$B(0)=72\,491=71\times 1\,021,$$

$$B(5)=72\,511=59\times 1\,229,$$

$$B(9)=7\,256=149\times 487,$$

它们都不是素(质)数,这实际上是对上述结论的否定.

(1979 年《数论导引》再版时,已将上述内容删去)

其实这个问题源于欧拉(Euler,L.)(拉格朗日(Lagrange,J.-L.)也给出过 n^2+n+17 当 $n=1,2,3,\cdots,16$ 时,其全部给出素数).

早在 18 世纪初,欧拉已注意到用多项式表示(产生)素数问题,他发现:

$$E(n)=n^2+n+41$$

当 $-40\leqslant n\leqslant 39$($n$ 取整数)时,$E(n)$皆给出素数(共 80 个).

显然,$n=40$ 时 $E(40)$已不再是素数.换言之当 n 为整数时,$E(n)$并非全都给出素数(不过,1963 年有人用电子计算机对 $1\leqslant n\leqslant 10^7$ 的整数进行验算,发现其中有 47.5% 的 $E(n)$给出素数)

尔后人们陆续发现:

n^2-n+17 当 $0\leqslant n\leqslant 16$($n\in\mathbf{Z}$,下同)时全都给出素数(共 17 个);

当 $1\leqslant n\leqslant 12$ 时,$169-n-n^2$ 全都给出素数(共 12 个);

当 $0\leqslant n\leqslant 79$ 时,$n^2-79n+1\,601$ 全都给出素数(共 80 个);

当 $1460\leqslant n\leqslant 1539$ 时,$n^2-2\,999n+2\,248\,541$ 全都给出素数(共 80 个)

尽管 $f(n)=n^2+n+p$ 当 n 为自然数时,不能全都给出素数,但由此引出的数论课题却不少,比如:

1933 年有人证明,形如 n^2+n+p,对于 $n=0,1,2,\cdots,p-1$ 皆给出素数的 p,除 41 以外下一个将大 $25\times 10^7+1$.

转年又有人证明,这种 p 至多还有一个(除 $p=41$ 外).

30 年后,1967 年斯塔克(Stark,H.M.)指出这样的 p 根本不存在.

对于非首一多项式(最高项系数不是 1 的多项式)的情形,嘎斯(Gazsi,A.T.)发现:

$G(n) = 60n^2 - 1710n + 12151$

当 $1 \leqslant n \leqslant 20$ 产生 8 对正的相继素数(注意相继即是相邻素数)和 1 对负的相继素数(-29 和 -31).

当 $0 \leqslant n \leqslant 42$ 时, $47n^2 - 1701n + 10181$ 全给出素数;

当 $0 \leqslant n \leqslant 44$ 时, $36n^2 - 810n + 2753$ 全给出素数

威廉姆斯(Williams, S.)发现, $2n^2 - 1000n - 2609$ 可给出 602 个素数.

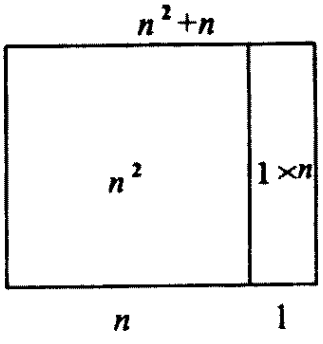
上述问题其实还与乌兰(Vlam, S.M.)关于素数分布的发现(见本书"乌兰现象"一节)有关.比如 $n^2 + n + 17$ 当 $0 \leqslant n \leqslant 16$ 时均为素数.

我们将 17,18,19,…从里向外按反时针螺旋状排布,你会发现:式子表示的素数全都在同一条直线上.

81	80	79	78	77	76	75	74	
82	53	52	51	50	49	48		72
83	54	33	32	31	30		46	71
84	55	34	21	20		28	45	70
85	56	35	22		18	27	44	69
86	57	36		24	25	26	43	68
87	58		38	39	40	41	42	67
88		60	61	62	63	64	65	66
	90	91	92	93	94	95	96	…

看上去也许会使人觉得奇妙,但你稍稍思忖便能发觉:

$n^2 + n$ 不恰好是一个边长为 n 的正方形加上一个 $1 \times n$ 的矩形吗?从数码的个数角度来看,这恰好是下一个素数的位置(注意:最多转 8 圈).



当然类似的问题还有许多,比如:1837 年德国数学家狄利赫莱(Dirichlet, P.G.L.)证

明了：

若$(l,k)=1$(即 l,k 互素)，则形如 $l+kn(n=1,2,3,\cdots)$的素数有无穷多个.

比如 $4n+1$ 型素数有 5,13,17,29,…

由此又引发人们对等差数列中的素数，其中包含孪生素数、三生素数、……

相差为 2 的两个素数称为孪生素数，比如 3,5;11,13;…

孪 生 素 数 简 表

发 现 者	孪 生 素 数 或 其 位 数
Lehmer & Riesel	$9\times 2^{211}\pm 1$
Peak & Crandall	64 136 154 203 303 位
Williams	$76\times 3^{169}\pm 1$，$156\times 5^{202}\pm 1$，$76\times 3^{169}\pm 1$
Baillie	$297\times 2^{546}\pm 1$
Atkin & Rickert	$694\ 513\ 810\times 2^{2\,304}\pm 1$ $1\ 159\ 142\ 985\times 2^{2\,304}\pm 1$
Parady & Smith	$663\ 777\times 2^{7\,650}\pm 1$，$571\ 305\times 2^{7\,701}\pm 1$， $1\ 706\ 595\times 2^{11\,235}\pm 1$
Dubner,H.	$1\ 692\ 923\ 232\times 10^{4\,020}\pm 1$(4 030 位)
	$361\ 700\ 055\times 2^{39\,020}\pm 1$(11 755 位)
	$2\ 409\ 110\ 779\ 845\times 2^{60\,000}\pm$(18 072 位)

有人提出如下猜想：

孪生素数有无穷多个.

然而问题至今仍未获证.但$\sum_{p}\frac{1}{p}$(p 为孪生素数的第一个)收敛，(1919 年由挪威数学家布鲁恩(Brun,V.)证明)说明这种数稀疏.

与孪生素数问题类似，有人提出了相隔为定数的三生素数问题，比如有人从

$$105m+47,\quad 105m+53,\quad 105m+59$$

令 $m=0,2,10,50,74$ 而得到：

47,53,59；　　257,263,269；　　1 097,1 103,1 109；

5 297,5 303,5 309；7 817,7 823,7 829，

五组相隔(差)为 6 的三生素数.

又 251,257,263,269 和 1 741,1 747,1 753,1 759 为间隔(相差)6 的两组四生素数.

有人还找出相(公差)隔为 30 的五生素数.

首　项	间　隔	发　现　者
9 843 019	30	Blundon, W.J.
$10^{10}+24\ 493$	30	Jones, M.F.& Lal, M.
121 174 811	30	Lander & parkin

上表仅给出其中的 3 组，在 3×10^8 以内，还有 25 组这类素数(间隔不是 6).

又 $9\ 843\ 019+30k(0\leqslant k\leqslant4)$ 是其中数字最小的一组.

有人曾提出猜想：

(1)有 3 个相继素数组成的算术级数(等差数列)是否有无穷多个?

(2)是否存在任意长(项数)度的相继素数算术级数?

上述猜测至今未获解.

类似的问题还有，像等差数列(算术组数)中素数问题.

1944 年有人曾证明了：

存在无穷多组由 3 个素数(不一定相继)组成的算术级数.

但是要寻找全部由素数组成的算术级数却远非那么轻松.可以证明：

由 n 个素数组成的算术级数，其公差必须能被小于或等于 n 的全部素数整除.

爱尔特希(Erdös,P.)曾猜测(该猜测至今未获证):

若$\{a_i\}$为任意的整数无穷序列,且$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}$发散,则该序列包含任意长的算术级数.

下表给出了部分素数算术级数的资料(项数稍多者).显然孪生素数、三生素数……也是素数算术级数的特例而已.

某些素数算术级数表

数列长(项数)	首　项	公　差	发现者及时间
10	199	210	1970 年
12	166 601	11 550	E.Karst,1967
	110 437	13 860	同上
	152 947	同上	同上
	23 143	30 030	V.A Golubev,1958
	1 498 141	同上	E.Karst,1968
	188 677 831	同上	S.C.Root 1969
	805 344 823	同上	同上
	409 027	90 090	W.N.Seredinskii,1966
	802 951	同上	E.Karst 1969
	862 397	同上	同上
13	4 943	60 060	
	766 439	510 510	W.N.Seredinskii,1965
14	46 883 579	2 462 460	
16	53 297 929	9 699 690	
	2 236 133 941	223 092 870	S.C.Root,1969
17	3 430 751 869	87 297 210	S.Weintraub,1977
18	107 928 238 317	9 922 782 870	Pritchard,1978
19	829 764 433	4 180 566 390	同上

此外,人们还研究了形如$f(n)=n^k+1$的多项式产生素数的问题,比如$f(n)=n^2+1$,当$n=1,2,4,6,10$时,给出素数:

2, 5, 17, 37, 101.

人们还借助电子计算机计算给出，在某些范围内 $f(n)$ 产生素数的个数的统计资料：

$f(n)=n^2+1$ 产生素数个数

n	$\leqslant 10^4$	$\leqslant 10^5$	$\leqslant 1.8\times 10^5$
$f(n)$产生素数个数	842	6656	11223

它的一般公式是：小于 N 的 n^2+1 型素数个数 $\sim \frac{C\sqrt{N}}{l_n N}$，当 $N\to +\infty$ 时，$C\approx 1.3727$.

再如三次多项式 $\varphi(n)=n^3+1$，当 $n=1,3,5,29$ 时也分别给出如下素数：

3，29，127，24391.

人们还研究发其他类型的素数，下表给出了 $n!\pm 1$ 型素数发现资料：

发现者	素数类型	n 值
Buhler,J.P. Crandall,R.E. Penk,M.A.	n! +1	1,2,3,11,27,37,41,73,77,116,154,320,340,399,423,…
	n! -1	3,4,6,7,12,14,30,32,33,38,94,166,324,379,469,…

5.希尔伯特第三问题的否定

希尔伯特(Hilbert,D.)德国数学家，毕业于哥尼斯堡大学，毕业后留校任教，后转至哥廷根大学.他在不变式理论、代数数论、几何学、微分方程、积分方程、数理逻辑、变分法等诸多领域有研究和贡献.

由于他在数学诸多领域的研究成果，1913 年当选柏林科学

院院士,1928 年选为英国皇家学会会员.

1900 年在巴黎召开的第 2 届国际数学家大会上发表了题为"数学问题"的著名演讲,演讲中提出 23 个数学问题,成为世界数学史上重要的里程碑,也为 20 世纪数学发展揭开了序幕(我们前文曾有述).

他的演讲获得极大成功,各国数学杂志纷纷转载,一批又一批数学家从此坠入数学天地,正如数学家韦尔(Wegl,H.)所说:"随着穿杂声服装风琴手的希尔伯特那甜蜜的笛声,诱惑了如此众多的老鼠,随他一起跳进了数学的深河".

这 23 个数学问题揭开了隐藏在未来之中的面纱,探索未来世纪数学发展前景.经过人们百余年的研究,其中的一半已圆满解决,而大约三分之一仍是悬而未决,有的有部分进展、有的相去甚远.

其中第 3 问题在会议当年即被希尔伯特的学生戴恩(Dehn,M.W.)否定地解决.

对于平面图形来讲,"等积"是指它们的面积相等;而两个几何图形若能把其中的一个经过有限次裁剪可以拼成另外一个图形,则称这个图形组成相等.

面积相等的几何图形不一定组成相等.比如圆和与它等积的三角形,就不是组成相等,但是,19 世纪匈牙利数学家博利亚(Bolyai,J.)和德国学者盖尔文(Gerwien)各自独立地证明了:

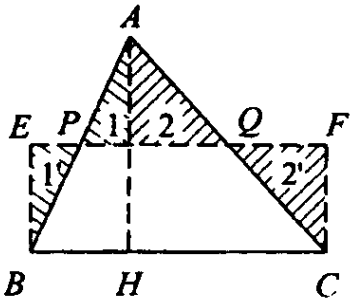
两个面积相等的多边形必定组成相等.

下面我们简述一下它的证明大意,我们用 $A \simeq B$ 表示 A,B 组成相等.这样:

(1)若 $A \simeq B$,又 $B \simeq C$,则 $A \simeq C$.

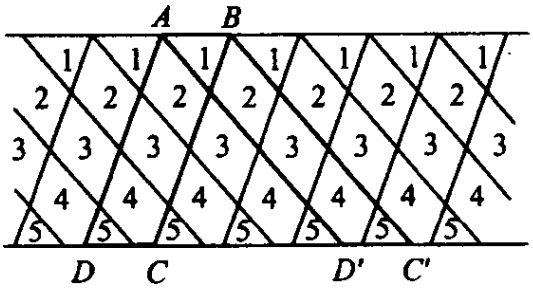
(2)三角形 $\simeq$ 与该三角形等积的矩形.

这从右图可容易地看出,$\triangle ABC \simeq$

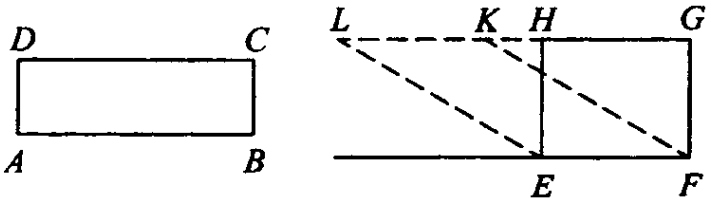


$\square EBCF$.这里 AH 为 BC 上高，PQ 为中位线.

(3)同底等积的两个平行四边形组成相等.如图 $S_{ABCD}=S_{ABC'D'}$，分别作与 AD，AD' 平行的两组平行线，它们的组成相等由图中可以看出.



(4)面积相等的两个矩形组成相等.



若 $S_{\square ABCD}=S_{\square EFGH}$.在两个矩形的四条边中，设 AB 最长，则可以 EF 为底作一个与矩形等积，且一边长为 AB 的平行四边形 $EFKL$，这样：

有 $\square EFGH\simeq\square EFKL$（由(3)），

而 $\square EFKL\simeq\square ABCD$（由(3)）.

故 $\square EFGH\simeq\square ABCD$（由(1)）.

(5)任何多边形$\simeq$与该多边形等积的矩形.

这只须注意任意多边形均可分成有限个三角形.

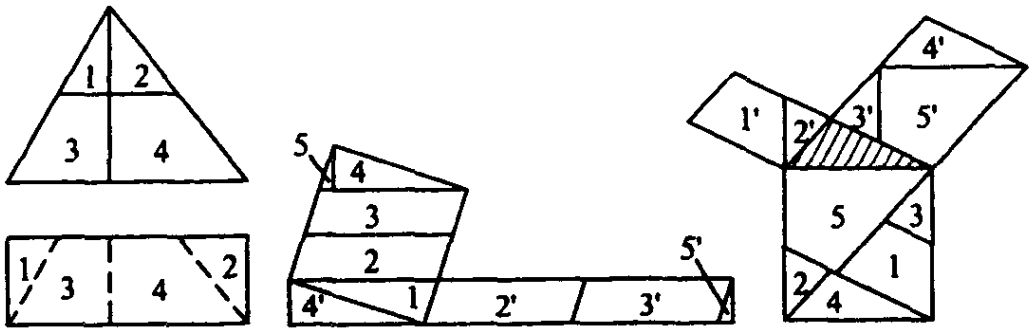
综上，两个多边形中的每一个均可和某一矩形组成相等，而这两个矩形面积相等，故它们组成相等(由(4))，从而两多边形组成相等(由(1)).

注　这个问题也可这样来证(大致步骤)：

设两个多边形分别是 A 和 B.

(1)任意三角形≃矩形(见图(1));

(2)矩形≃正方形(见图(2));



(1) (2) (3)

(3)n 边形可分割成 $n-2$ 个三角形;如是则由(1)、(2)有:三角形≃正方形,而两个正方形≃大正方形(见图(3)).

归纳地有　图形 A≃正方形Ⅰ;

同理　图形 B≃正方形Ⅱ.

因 $S_A = S_B$,故　$S_{\text{正方形Ⅰ}} = S_{\text{正方形Ⅱ}}$,

从而　正方形Ⅰ≃正方形Ⅱ.

(详细证明还需一些细微过程,这里从略)

如果问:这个结论可否推广到空间中去即:

两个等积的多面体是否组成相等,

这便是有名的"希尔伯特第三问题".

1900 年,希尔伯特的学生戴恩证明了:

一个正方体和一个与之等积的正四面体不组成相等.

这样,他否定的(部分地)解决了希尔伯特第三问题,因为他没有直接解决希尔伯特提出的关于两个四面体的问题(立方体并非四面体).

1950 年,瑞士数学家哈德维格(Hadwiger, H.)和他的学生们,研究出一个解决此问题的代数条件.在叙述这个定理之前,我们先介绍一个概念:可加函数.

设 f 是定义在实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个函数,对 n 维实向量空间

$\mathbf{R}^n$ 上的一个向量$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$若满足：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0,$$

而数组$(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots,f(\alpha_n))$也满足：

$$k_1f(\alpha_1)+k_2f(\alpha_2)+\cdots+k_nf(\alpha_n)=0,$$

则称 f 是一个可加函数.

下面我们给出哈德维格的结果：

设 A,B 是两个等积的多面体，A 有 p 根长度分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_p$ 的棱，A 在这些棱上的二面角分别是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$；$B$ 有 q 根长度分别是 $t_1,t_2,\cdots,t_q$ 的棱，B 在这些棱上的二面角分别为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q$，现构成一个 $p+q+1$ 维的向量：

$$(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_p;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q;\pi)$$

若可以找到该向量的一个可加函数 f，且满足：

(1) $f(\pi)=0$；

(2) $\sum\limits_{k=1}^{p}l_kf(\alpha_k)\neq\sum\limits_{k=1}^{q}t_kf(\beta_k)$，

则多面体 A 和 B 不组成相等.

下面我们用它来证明戴恩的结论：

一个立方体 A 和一个与之等积的正四面体 B 不组成相等.

设 A 棱长为 l，每条棱上的二面角均为 $\pi/2$；B 的棱长为 t，每条棱上的二面角都为 φ，容易算得 $\varphi=\cos^{-1}\frac{1}{3}$，它是一个无理数.

今考虑 19 维的向量$(\underbrace{\pi/2,\pi/2,\cdots,\pi/2}_{12个};\underbrace{\varphi,\varphi,\cdots,\varphi}_{6个};\pi)$，且取函数 f 使

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad f(\varphi)=1,\quad f(\pi)=0,$$

显然 f 是可加函数，事实上若有 $n_1,n_2,\cdots,n_{12};m_1,m_2,\cdots,m_6;$

m 使

$$\sum_{k=1}^{12} n_k\alpha_k + \sum_{k=1}^{6} m_k\beta_k + m\pi$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{12} n_k + \varphi\sum_{k=1}^{6} m_k + m\pi$$

$$= N\cdot\frac{\pi}{2} + M\cdot\varphi + m\pi = 0. \qquad (*)$$

若 $M\neq 0$,有 $\frac{\varphi}{\pi} = -\frac{N+2m}{2M}$,式左是无理数,而式右是有理数不可能,从而只有 $M=0$.

这样由(*)可有:$N=-2m$.

由是 $$\sum_{k=1}^{12} n_k f(\alpha_k) + \sum_{k=1}^{6} m_k f(\beta_k) + mf(\pi)$$

$$= f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{k=1}^{12} n_k + f(\varphi)\sum_{k=1}^{6} m_k + mf(\pi)$$

$$= 0\cdot\sum_{k=1}^{12} n_k + 1\cdot 0 + m\cdot 0 = 0,$$

即 f 是可加函数.

又由 $f(\pi)=0$, $\sum_{k=1}^{12} l_k f(\alpha_k) = 12lf\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

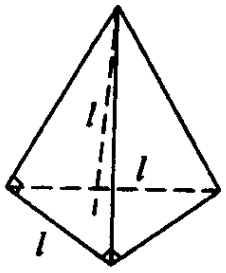
而 $\sum_{k=1}^{6} t_k f(\beta_k) = 6tf(\varphi) = 6t \neq 0$,

故 $\sum_{k=1}^{12} l_k f(\alpha_k) \neq \sum_{k=1}^{6} t_k f(\beta_k)$.

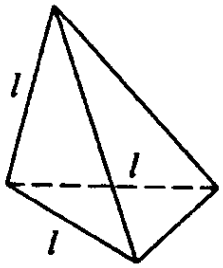
由哈德维格的定理知:立方体 A 和正四面体 B 不组成相等.

利用哈德维格定理还可以证明希尔伯特提出的等底等高四

面体(普通四面体与直四面体)不组成相等(见下图).



三棱相等且一棱垂直
于另外两棱的四面体



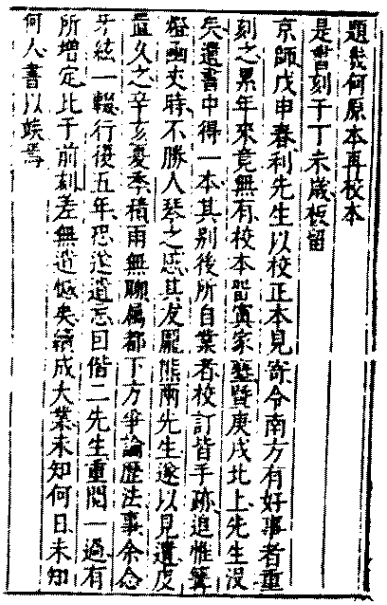
有三条棱相等
的直四面体

四 山雨欲来

1.欧几里得几何的衍生及障碍

公元前三世纪,希腊亚历山大里亚学派的创始者欧几里得(Euclid)集前人几何研究之大成,写就了在数学史上影响深远的巨著《几何原本》,这是用公理系统建立演绎数学体系的典范.

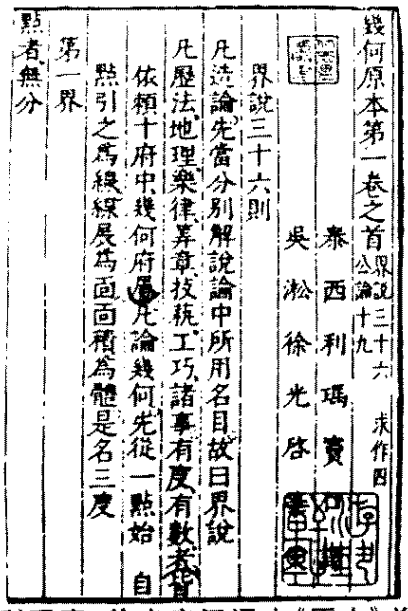
《原本》1570 年比林斯利(Billingsley)的英译本扉页



題幾何原本再校本

是書已刻于丁未歲板留
京師戊申春利先生以校正本見寄今南方有好事者重
刻之累年來竟無有校本習賓家鑒暨庚戌北上先生沒
矣還書中得一本其刻後所自業者校訂皆手跡追惟篋
笥畫夫時不勝人琴之感其友麗熊兩先生遂以見遺友
益久之辛亥夏季積雨無聊偏都下方爭論歷法事余心
牙絃一輟行復五年恐塗遠忘曰偕二先生重閱一過有
所增定比于前刻差無遁恨庶幾鋟成大業未知何日未知
何人書以竣焉

徐光启撰写的"题几何原本再校本"



幾何原本第一卷之首界說三十六 公論十九 求作四

泰西利瑪竇
吳淞徐光啓

界說三十六則

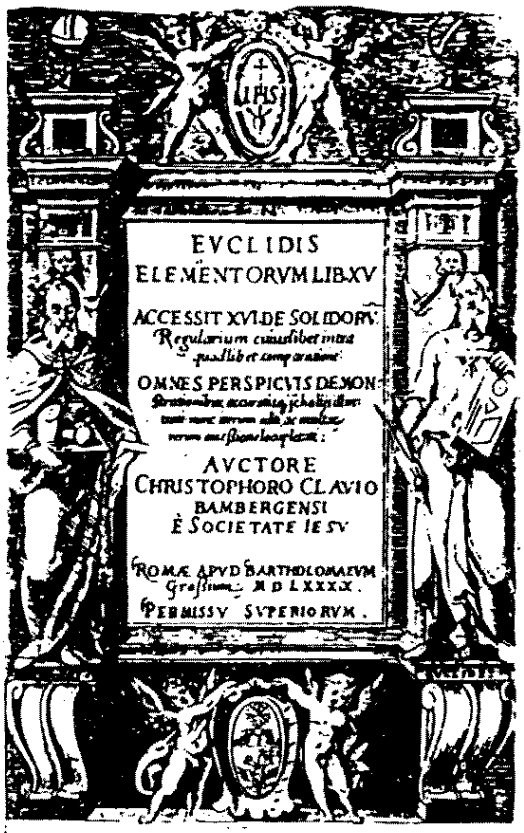
凡造論先當分別解說論中所用名目故曰界說

凡歷法地理樂律算章技藝工巧諸事有度有數者皆依賴于府中幾何府中凡論幾何先從一點始自點引之爲線線展爲面面積爲體是名三度

第一界

點者無分

利玛窦、徐光启汉译本《原本》首页



1574 年克拉维斯的《几何原本》译本封面

153

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ Ε' ΒΔΟΜΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

ΟΡΟΙ.

α

Μονάς ἐστι, κατὰ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

DEFINITIONES.

1

Vnitas est, secundum quam entium quodque dicitur vnum.

β

Ἀριθμὸς δέ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

2

Numerus autem, ex vnitatibus composita multitudo.

1753 年巴黎出版的《几何原本》希腊文、拉丁文对照本扉页

《几何原本》对西方数学、乃至整个世界数学都产生了巨大影响.它流传至今,被译成多国文字,有大约1000多个版本.

《原本》共13卷,第一卷给23个定义,五个公理(适用于所有科学)和五个公设(适用于几何学).

在《原本》注释者中人们最关注的是第五公设凯斯尔(Keyser,C.J.)称之为"科学史上最重要的一句话"),它的等价叙述为:

平面内过已知直线外一点,有且仅有一条直线与已知直线平行(平行公设).

正是由于它,导致几何史上一场革命——促成非欧几何的诞生.

《原本》中前四个公设皆被人们接受了,而第五公设一开始就受到人们怀疑:它似乎应该是一条定理,这样人们提出两条途径:

(1)用更为自明的命题代替它;

(2)从其它公设中证明它.

意大利人萨谢利(Saccheri,G.著有《排除任何谬误的欧几里得》一书)、瑞士人兰伯特(Lambext,H.著有《平行线理论》一书)和法国数学家勒让德均对第五公设作了深入研究后认为平行公设不能证明.

匈牙利人鲍耶(Bolyai,J.)对于平行公设作过深入的研究,且在《绝对空间几何》一文中(作为其父亲的《为好学青年的数学原理论著》的附录发表)已建立起非欧几何思想.

但是,真正系统地阐述该几何的是俄国数学家罗巴契夫斯基(Lobatchevsky,N.I.),他的论文于1829—1830年发表在《喀山大学通讯》上.

此前,他曾于1826年在喀山大学物理数学系学术会宣读过第一篇关于非欧几何的论文《几何原理及平行线定理严格证明

的摘要》.

会后,学术委员会对他的论文持否定态度,又迟迟不肯写出书面评语,最后连文稿也丢失了.

1832 年据罗巴契夫斯基请求,喀山大学学术委员会将其在通讯上的《几何学原理》呈送彼得堡科学院评审.

著名数学家奥斯特里格拉斯基(Остроградскчщий ,M.B.)的鉴定中写道:

看来,作者旨在写出一部使人不能理解的著作,以达到自己的目的……由此我得出结论:罗巴契夫斯基校长的这部著作谬误连篇,故不值得科学院注意.

就在罗巴契夫斯基临终前两年,还遭到俄国著名数学家布尼雅可夫斯基(Буняковский ,B.Я.Б.)的发难和攻击.

罗巴契夫斯基理论自创立起竟没有遇到一位知己,就连这种几何思想的另一位发现者、大数学家高斯也不肯公开支持他的工作.

工作的遭遇及家庭的不幸(长子病故)使得罗巴契夫斯基更加苦闷,他身体渐渐垮下来,眼睛逐渐失明,1856 年 2 月 12 日,罗巴契夫斯基走完了他生命的最后旅程,此前他完成了最后一部巨著《论几何学》.

这位"几何学中的哥白尼",不仅解放了几何学,也解放了人类的数学思想.他创立的非欧几何又称双曲几何.

由于平行公设不同的假定,1854 年另一种非欧几何——黎曼几何(又称椭圆几何)诞生了.

同时,人们称欧几里得几何为抛物几何.

1872 年德国数学家克莱因(Klein,C.F.)综合了前人的几何学观点与英国代数学家凯莱(Cayley,A.)的工作,发表了他的爱尔兰根纲领——提出存在九种几何学的观点,且它们可从在变

换群观点下统一起来:不同的几何对应不同的变换群而已,但又都是在研究不同变换群下的不变量或不变式.

变 换 群	不 变 量	几 何
射影变换群	共线性、交比	射影几何
仿射变换群	单比、平行性、共线性、交比	仿射几何
运动群	距离、角度、单比、平行性、共线性、交比	度量几何(欧氏几何)

又运动群是仿射群的子群,仿射群又是射影群的子群,因而度量几何是仿射几何的子几何,而仿射几何又是射影几何的子几何,而非欧几何为特殊的射影几何.

这样我们可有下表:

射影几何
- 仿射几何
  - 抛物度量几何——欧几里得几何
  - 其它仿射子几何
- 双曲几何
- 椭圆几何(单重、二重椭圆几何)

应该指出:这儿代数几何、微分几何未置上述分类方案中.

平面上九种凯莱—克莱因几何

角的测度	长度的测度		
	椭圆的	抛物的	双曲的
椭圆的	椭圆几何学	欧几里得几何学	双曲几何学
抛物的(欧几里得的)	伴欧几里得几何学	伽利略几何学	伴闵可夫斯基几何学
双曲的	伴双曲几何学	闵可夫斯基几何学	二重双曲几何学

下表给出九种几何对于“平行公设”的结论:

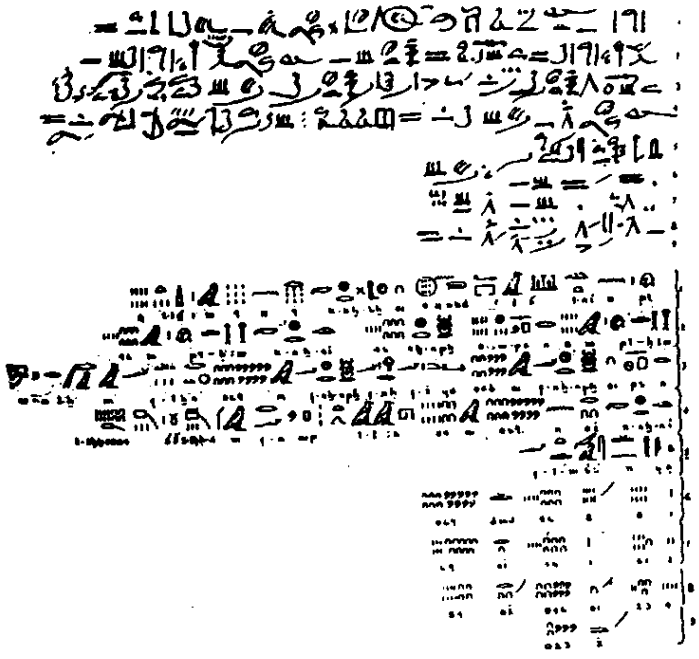
过直线外一点与直线不相交的直线数

角的测度	长度的测度		
	椭圆的	抛物的	双曲的
椭圆的	0	1	∞
抛物的	0	1	∞
双曲的	0	1	∞

我们还想再啰嗦几句，欧氏几何是研究刚体变换群（如平移、旋转、反射）下的不变性．仿射几何、射影几何则是研究相应群下的不变量或不变性而已．

2.一般代数方程的求根公式的前前后后

早在3000多年以前，古埃及人已开始研究某些方程问题，且将它们记在纸草上：



赖因德纸草书（上面是原文，下面是象形文字及拉丁字母译文）

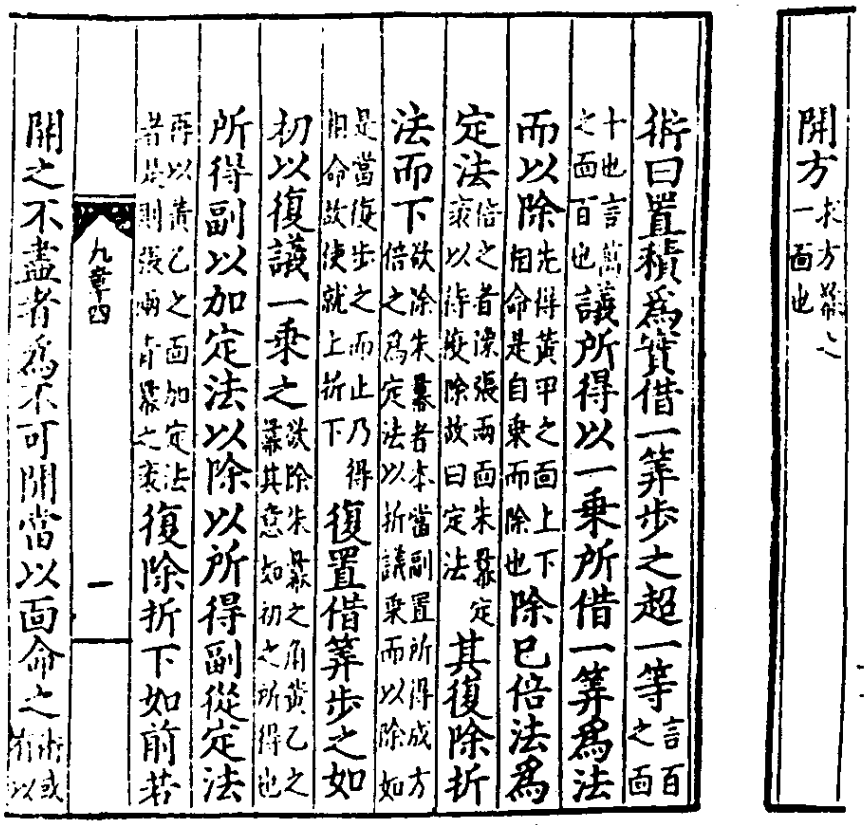
比如尼罗河畔出土的赖茵德纸草(公元前16世纪的纸草书,最初发现于埃及底比斯古都废墟中)

1858年为苏格兰收藏家赖茵德(Rhind, H.)购获,现藏伦敦大英博物馆上用图:

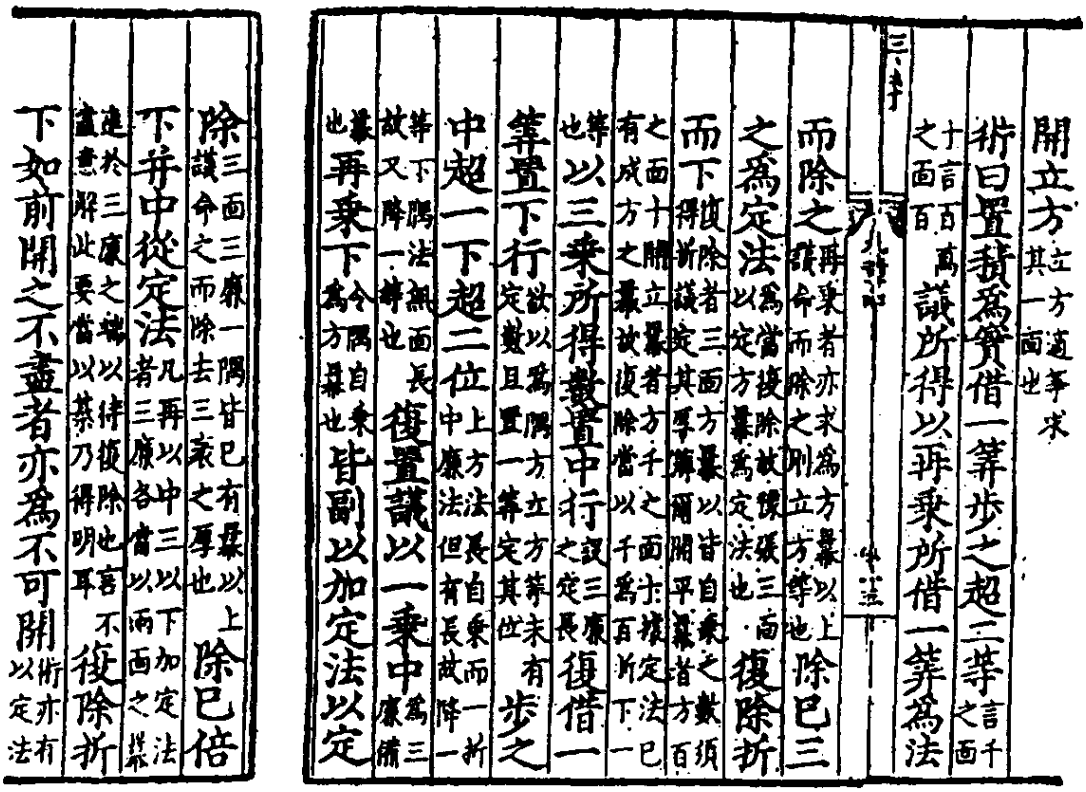
它表示方程 $x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)=37$.

据载,古代巴比伦人也已知道某些特殊的一元二次和三次方程的解法.

我国两千多年前的数学书《九章算术》中也有"方程"一章,专门研究一次联立方程组,此外还研究了数的开方方法.



《九章算术》中《少广》章开方术



開立方 立方適等求其一面也 術曰置積爲實借一等步之超二等 言千之面百之面百爲議所得以再乘所借一等爲法而除之 再乘者亦求爲方冪以上議命而除之則立方等也 除已三之爲定法 爲當復除故隨張三面以定方冪爲定法也 復除折而下 復除者三面方冪以皆自乘之數須得折議定其厚薄開平冪者方百之面十開立冪者方千之面未滿定法已有成方之冪故復除當以千爲百所下一等也 以三乘所得數置中行之 設三廉之定長 復借一等置下行 欲以爲隅方立方等未有定數且置一等定其位 步之中超一下超二位 上方法長自乘而一折中廉法但有長故降一等下隅法無面長故又降一等也 復置議以一乘中爲三廉各自乘 今隅自乘冪也 再乘下爲方冪也 皆副以加定法以定 除三面三廉一隅皆已有冪以上議命之而除去三乘之厚也 除已倍下并中從定法 凡再以中三以下加定法者三廉各當以兩面之冪 連於三廉之端以待復除也言不盡意解此要當以慕乃得明耳 復除折下如前開之不盡者亦爲不可開 術亦有以定法

《九章算术》中《少广》章开立方术

一元二次方程的一般解法即求根公式是9世纪中亚的学者阿里·花拉子模(al - khwarizmi)给出的.

人们在探得一元二次方程求根公式后,便着手于三次、四次……甚至更高次方程求根公式的寻求.

1545年意大利人卡丹(Cardano)在其所著数学书《大法》中给出了一元三次方程的求根公式(常称之为卡丹公式)*.

对于三次方程 $x^3 + px + q = 0$ (*) 则有

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u + v,$$

* 关于这个公式的发明权,还有过一番争论,据说这是卡丹从一位名叫塔塔里亚的人那儿骗来的.

卡丹(Cardano)

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u+v) + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}(u-v),$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u+v) - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}(u-v).$$

又一般的三次方程 $y^3 + a_1 y + a_2 y + a_3 = 0$,只需通过 $x = y + \frac{a_1}{3}$代换可化为(*)状,这里:

$$p = -\frac{{a_1}^2}{3} + a_2, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3.$$

卡丹的学生费拉利(Ferrari)沿用他老师的方法给出了一元四次方程的求根公式.

对于四次方程 $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$(**),若方程

$$z^3+\frac{q}{2}z^2+\frac{q^2-4s}{16}z-\frac{r^2}{64}=0$$

的三个根为 z_1,z_2,z_3，又 $u=\pm\sqrt{z_1}$，$v=\pm\sqrt{z_2}$，$\omega=\pm\sqrt{z_3}$，则(**)的四个根为

$$x=u+v+\omega$$

的8种组合中的四种，这儿 u,v,ω 还要满足

$$u\,v\,\omega=-\frac{r}{8}.$$

此后人们更开始寻求一元五次或五次以上方程的公式解(这是人们在找到二、三、四次方程求根公式后的自然想法和拓广).

三百年过去了，人们仍是一无所获.这其间不少知名的数学家都付出了自己的劳动和汗水，当人们从正面努力而未获结果时，有人开始怀疑它的存在性.

阿贝尔(Abel,N.H.)1802年生于挪威，早年就显示出其数学才华，1821年入奥斯陆大学学习.其间他开始研究一般五次代数方程的求根公式.

开始，他曾经得到一个五次方程求根公式，稍后他发现了其中的错误.不久，他开始转换思维方式，从反面考虑这个棘手的问题，且最终证明“一般五次方程无根式解”.

他曾自费印刷了他的论文，且寄给了高斯，然而不料文章寄出后再无下文，据称人们在高斯去世后清理高斯遗物中发现了那本躺在尚未开启的信封中的小册子.

阿贝尔又将论文寄给了《纯粹和应用数学杂志》，尽管杂志创办者克雷尔(Crelle,A.L.)坦率地承认读不懂这篇论文，但还是将它发表了.

此外阿贝尔还考虑了一些特殊方程(如 $x^n-1=0$)，它们的

解能用根式表达.于是他着手刻画这类方程的特征问题,在他临终前(年仅 27 岁)将这些结果告诉了克雷尔和勒让德(Legendre,A.M.).

阿贝尔的未竟工作落到法国青年伽罗华(Galois,E.)身上.

伽罗华生于巴黎近郊小镇,15 岁入路易皇家中学,后考入巴黎师范大学.

他在勒让德、拉格朗日(Largange,J-L.)、柯西(Cauchy,A.-L.)、高斯(Gauss,G.F.)等大师工作基础上,仔细研读阿贝尔的文章,以其创造性的工作作出了划时代的数学成就:

他发现且创立了反映每个代数方程特征的置换群,彻底解决了代数方程的可解性问题.

但他生不逢时,一方面当时法国数学界的权威不能认识伽罗华工作的重大意义,而否定了他的成果.又因参加法国历史上著名的"七月革命"而被捕入狱,出狱不久在一次决斗中饮弹而去,年仅 20 岁.

1829 年,伽罗华曾将他关于方程解法问题的两篇文章呈交巴黎科学院,这些文章让柯西遗失了.

1830 年他的另一篇文章由科学院转到傅立叶(Fourier,J.B.J.)手里,可随傅立叶的病逝文章也石沉大海.

在泊松(Poisson,S.D.R.)提议下,伽罗华又将他的工作写入《关于用根式解方程的可解条件》一文,但不久被泊松以"难以理解"为由而退回.

在伽罗华决斗前夜,他为自己的工作匆忙草拟了一份说明交给了他的朋友柴拉利(Cheralier,A.)

1846 年,伽罗华死后 14 年,他的部分文章在柳维尔(Liouville,J.)创办的《数学杂志》上发表了.这也标志着数学的一种代表性理论、一种处理问题的全新方法的"群论"诞生了,人称

“伽罗华理论”.

3.函数连续与可微的争论

函数连续与可微是微积分学中两个重要概念.

19世纪初期,一般人都认为每一个连续函数都是可微的,只可能在一些孤立点处出现意外(这也是当时数学家们共同的失误).

比如 $y=|x|$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上连续,但它在 $x=0$ 处不可导.

处处连续、处处不可微函数的存在起初人们认为不太可能,直到1830年捷克学者波尔查诺(Bolzano,B.)构造出这种函数为止.

1871年维尔斯特拉斯(Weierstrass,K.)也给出一个这种函数的例子(早在1861年他就认为:想从函数连续性推出可微性的任何企图都会失败).

尔后又有不少人给出这种例子,比如范·德·瓦尔登以及我国学者闵嗣鹤、张景中、杨九高等.

(1)波尔察诺(Balzano,B.)的例子

先来定义一种运算.对于点 $A(a,b)$,$B(a+\alpha,b+\beta)$,约定如下五点的折线连接:

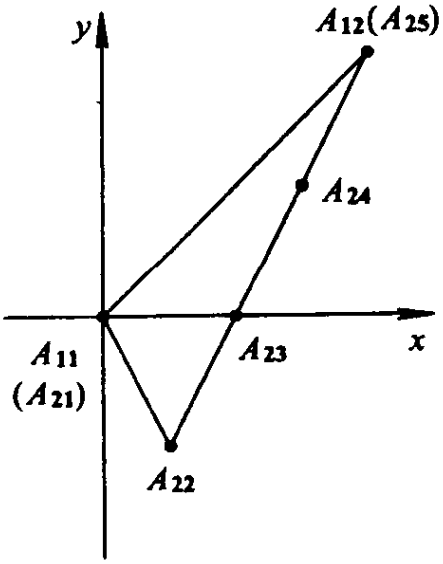
$$A\ (a,b),C\left(a+\frac{\alpha}{4},b-\frac{\beta}{2}\right),D\left(a+\frac{\alpha}{2},b\right),$$

$$E\left(a+\frac{3\alpha}{4},b+\frac{\beta}{2}\right),B\ (a+\alpha,b+\beta)$$

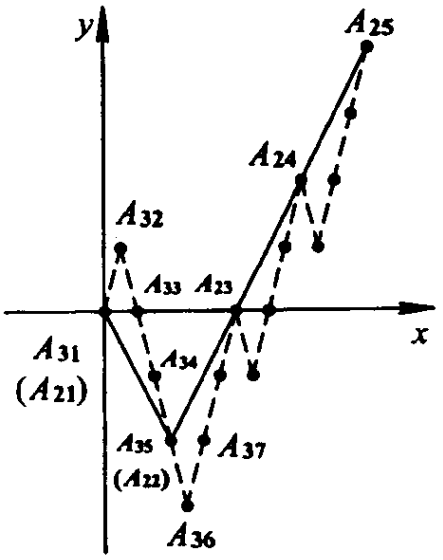
为 A,B 两点上的 B-运算,容易验证:C,D,E,B 共线.

用 $B_0(x)$ 表示这样一个函数:它的图象是连接 $A_{11}(0,0)$,$A_{12}(1,1)$ 的直线段,对该两点实施 B-运算,可得到点 $A_{21}(0,0)$,

$A_{22}\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$，$A_{23}\left(\frac{1}{2},0\right)$，$A_{24}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$，$A_{25}(1,1)$，且定义折线 $A_{21}A_{22}\cdots A_{25}$ 为函数 $B_1(x)$ 的图象.



$B_0(x)$，$B_1(x)$图象



$B_2(x)$图象

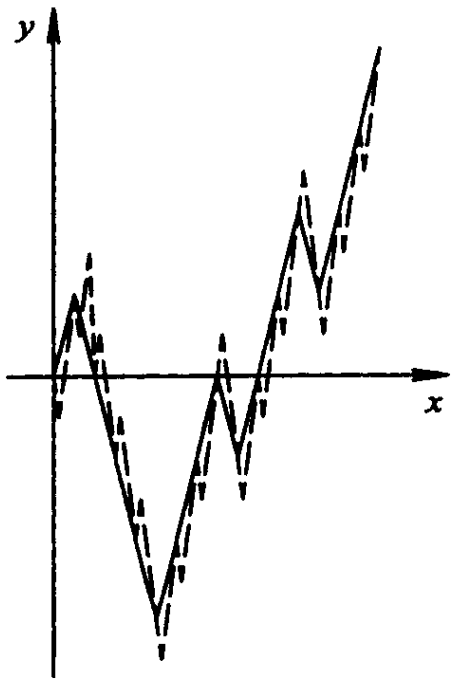
在每一对点 A_{21}，A_{22}；A_{22}，A_{23}；…中再应用 B-运算可得到点：

$A_{31}(0,0)$，$A_{32}\left(\frac{1}{4^2},\frac{1}{4}\right)$，

$A_{33}\left(\frac{2}{4^2},0\right)$，$A_{34}\left(\frac{3}{4^2},-\frac{1}{4}\right)$，

$A_{35}\left(\frac{4}{4^2},-\frac{1}{2}\right)$，$A_{36}\left(\frac{5}{4^2},-\frac{3}{4}\right)$，

$A_{37}\left(\frac{6}{4^2},-\frac{1}{2}\right)$，…



再以折线 A_{31}，A_{32}，…定义函数 $B_2(x)$. 如此下去，类似地可定义函数 $B_n(x)$，它的图象是一条折线，它们的顶点横坐标分别

是：

$$0, \frac{1}{4^n}, \frac{2}{4^n}, \cdots, \frac{4^n-1}{4^n}, 1$$

注意到若 $x=\frac{k}{4^n}=\frac{l}{4^p}$，$p>n$，则 $B_n\left(\frac{k}{4^n}\right)=B_p\left(\frac{l}{4^p}\right)$，

故在下列 x 值处：

$$\begin{aligned}&0, 1\\&0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\\&0, \frac{1}{4^2}, \frac{2}{4^2}, \cdots, \frac{15}{4^2}, 1\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \qquad (*)$$

亦即在 $x=\frac{k}{4^n}(k=0,1,2,\cdots,4^n, n=0,1,2,\cdots)$处惟一的定义波尔察诺函数 $B(x)$，且令 $B\left(\frac{k}{4^n}\right)=B_n\left(\frac{k}{4^n}\right)$.

如是函数 $B(x)$的图象通过所有折线 $B_n(x)(n=0,1,2,\cdots)$的顶点.

可以证明：对异于前面(*)中各数的任意值 x，总可以表为(*)中数列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\cdots$的极限，且 $\lim\limits_{m\to\infty}B(\alpha_m)$存在，而它的值定义为 $B(x)$.

这样 $B(x)$在[0,1]上有定义，且处处连续，然而无处可微.

(2)维尔斯特拉斯(Weierstrass，K.)的例子

维尔斯特拉斯给出(Weierstrass)函数

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^n\pi x)$$

其中 b 是一个奇数，$0<a<1$，且 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$. 它是一个连续而无处可微的函数.

(3)皮亚诺(Peano,G.)的例子

3	4	9
2	5	8
1	6	7

将 XOY 平面上单位正方形 K 如右图分成九个小正方形,且如图所示标上号(注意相邻的两标号的正方形均有一条公共边),它称为第一级正方形.

将第一级正方形中每个小正方形仍分成九个二级正方形,它们仍依据:相邻标号的两正方形均有一条公共边,且由原来一级正方形标号顺序依↷或它们的反向↶次序标号(如下图).

3	4	9	1	6	7	3	4	9
2	5	8	2	5	8	2	5	8
1	6	7	3	4	9	1	6	7
9	4	3	7	6	1	9	4	3
8	5	2	8	5	2	8	5	2
7	6	1	9	4	3	7	6	1
3	4	9	1	6	7	3	4	9
2	5	8	2	5	8	2	5	8
1	6	7	3	4	9	1	6	7

如此继续下去…显然,第 n 级正方形的每个小正方形边长为 $1/3^n$,且若点 $A\in\mathscr{K}$,则 A 至少属于 k 级正方形的诸小正方形之一($k=1,2,3,\cdots$)

若正方形 $\mathscr{K}$ 内取两相异的点 A、B,则定存在 N,使 $n\geqslant N$,该两点属于两个不同的 n 级正方形.

今取 $A(x,y)\in\mathscr{K}$,设 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,\cdots$ 依次为含有点 A 的第 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 级正方形的标号,故可令点 A 与数列 $\{\sigma_i\}$ 对应;反过来,每个数列 $\{\sigma_i\}$ 亦可对应于正方形 $\mathscr{K}$ 内一点.

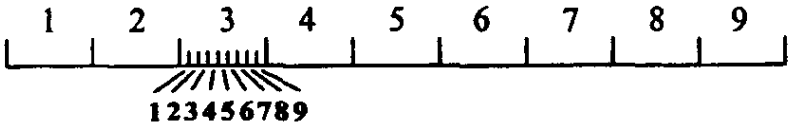
注意到 $\mathscr{K}$ 内不同的两点,有两个不同的序列与之对应,但正方形内一点也可对应着两个不同的序列,如

$$2,3,5,6,1,1,1,\cdots,1,\cdots$$

$$2,3,5,5,9,9,9,\cdots,1,\cdots$$

就对应着 $\mathscr{K}$ 内的同一点，这只须注意到标号为 1 和 9 的 i 级正方形($i\geqslant 6$)都有公共边，又这些正方形边长趋于 0，故上两序列对应的公共点重合.

我们再将长为 1 的线段(闭区间) I 分成相等的九份，且自左向右标上 1,2,…,9，并称之为第一级闭区间，将每个小线段再分成九等份，仿上也标上号 1～9 等等.



如是，闭区间 I 上的每个点均落在一个(如果它是内点)或两个(如果它是端点)各级闭区间上，这样它对应一个序列 σ_1，$\sigma_2,\cdots,\sigma_n,\cdots$；反之每个这样的序列也对应着闭区间 I 上的某一点.

取 $B\in I$，若它不是任何 n 级闭区间的端点，则它只对应一个唯一的序列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots$；如它是某个 n 级闭区间的端点，它亦对应两个序列：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,1,1,\cdots,1,\cdots$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},9,9,\cdots,9,\cdots$$

这样，对于属于闭区间 I 的点 B 皆可在正方形 $\mathscr{E}$ 内找到唯一的一点 A 使它们分别对应于同一个或两个序列.

若 B 的横坐标为 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$，$A$ 的坐标为 (x,y)，则 x,y 与 t 间分别确定着单值函数：

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

这两个函数称作皮亚诺函数，它是连续的，且处处不可微.

连续性 若取 t_1,t_2 使 $|t_1-t_2|<\dfrac{1}{9^n}$，即它们属同一个或相

邻的两个第 n 级闭区间,但此时它们也对应着正方形内位于同一个或两个相邻的 n 级正方形内,这样可有

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|<\frac{2}{3^n},$$

此即说 $\varphi(t)$是 t 的连续函数,下面证明它处处不可微.

处处不可微 注意到第 n 级正方形边长为$\frac{1}{3^n}$,第 n 级闭区间长为$\frac{1}{9^n}$,又 t 在$\left(\frac{\alpha}{9^n},\frac{\alpha+1}{9^n}\right)$变化时,$x=\varphi(t)$在$\left(\frac{\alpha}{3^n},\frac{\alpha+1}{3^n}\right)$上变化.

取 $t_0\in\left(\frac{\alpha}{9^n},\frac{\alpha+1}{9^n}\right)$及 h,使$|h|\leqslant\frac{2}{9^n}$,且使之满足

$$|x(t_0+h)-x(t_0)|\geqslant\frac{1}{2\cdot 3^n}$$

这是可能的,因为由 h 的取法知 t_0+h 与 t_0 同属一个 n 级闭区间,但也可使点$(x(t_0+h),y(t_0+h))$与点$(x(t_0),y(t_0))$属于相邻的两个 n 级正方形里.

这样可有 $\left|\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\right|\geqslant\frac{1}{4}\cdot 3^n$.

此即说 $x=\varphi(t)$在 t_0 不可导.注意到 t_0 的任意性,此即说 $\varphi(t)$在$[0,1]$处处不可导.

(4)范·德·瓦尔登(Waerden,B.L.)的例子(1930 年)

下面的例子是据范·德·瓦尔登的 1930 年给出的例子改造的.

在$|x|\leqslant\frac{1}{2}$,设 $f_1(x)\equiv|x|$,而在其它的 x 值处,用 1 为周期来延拓 $f_1(x)$,即

对每个 $x\in\mathbf{R}$ 和 $n\in\mathbf{Z}$,均有 $f_1(x+n)=f_1(x)$.

当 $n>1$ 时，定义 $f_n(x)\equiv 4^{1-n}f_1(4^{n-1}x)$，于是对每个整数 n 来讲，f_n 为周期是 4^{1-n} 的周期函数，且其极大值为 $4^{1-n}/2$.

最后，以 $\mathbf{R}$ 为定义域定义

$$f(x)\equiv\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

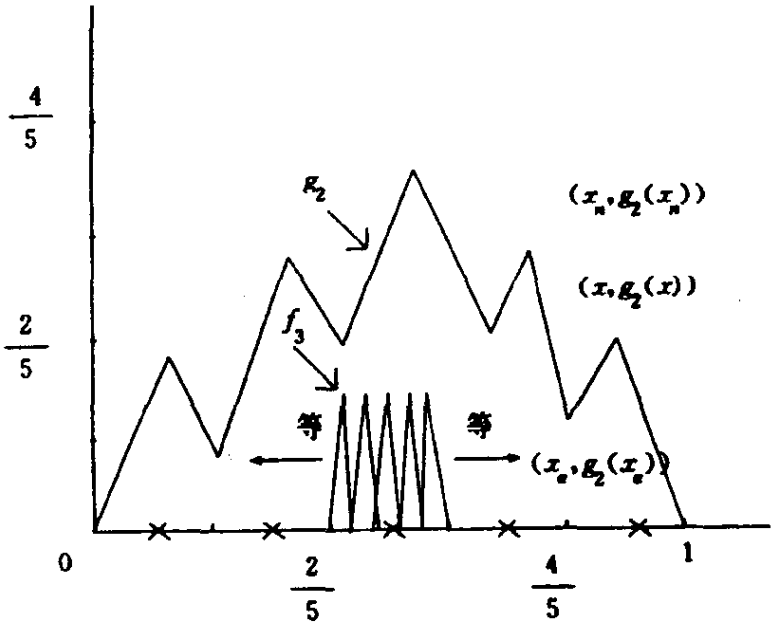
因为 $|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2}\cdot 4^{1-n}$，由级数收敛的 M - 判别法，知该级数在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

下面证明它处处不可微，令 $a\in\mathbf{R}$，对于 $n\in\mathbf{N}$，选定 h_n 为 4^{-1-n} 或 -4^{-1-n}，使

$$|f_n(a+h_n)-f_n(a)|=|h_n|,$$

于是，$|f_m(a+h_n)-f_m(a)|=\begin{cases}|h_n|,\text{当 } m\leqslant n \text{ 时},\\ 0,\text{当 } m>n \text{ 时}.\end{cases}$

这样，式 $\dfrac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}$ 是个整数，且奇偶性与 n 相同.



故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}$ 不存在，即 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可

微,注意到 a 的任意性.

4.集合论诞生的风风雨雨

19 世纪末德国数学家康托(Cantor,G.)创立的“集合论”是“数学思想的最惊人产物,是纯粹理性的范畴中人类活动的最美表现之一”(希尔伯特语),然而它的创生却经历了磨难,正像无理数、非欧几何出现一样.

集合论是研究集合的一般性质的数学分支.

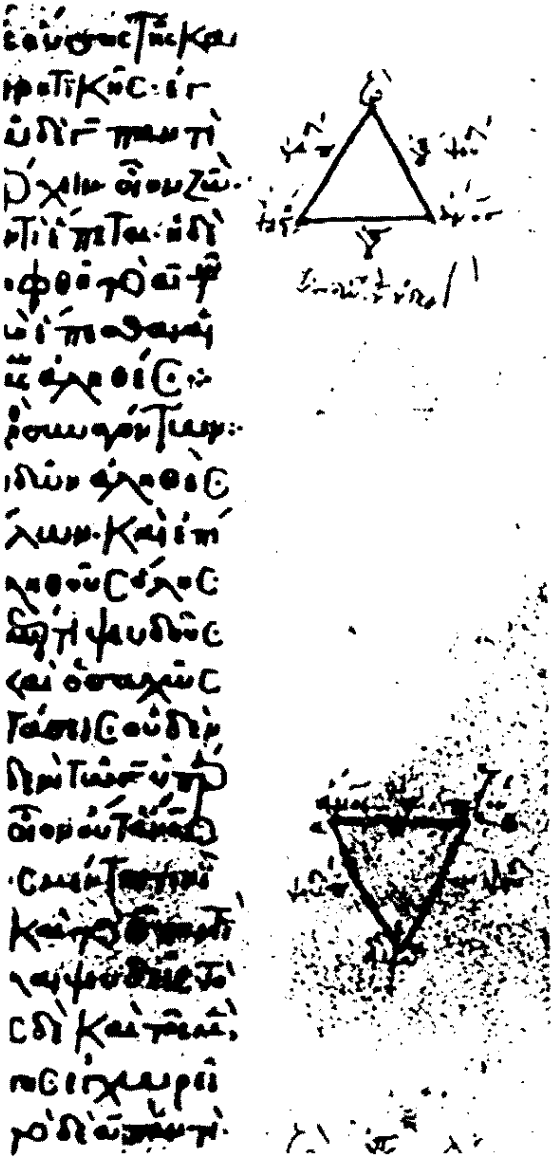
早在两千多年以前,古希腊学者们已最先注意且考察了大量“无限”的问题。

公元前 5 世纪,爱利亚学派的芝诺(Zeno)在研究运动和时间、空间关系时,提出一连串的悖论,其中最著名的四个悖论中的三个皆与“无限”概念有关.但这些遭到后来的学者亚里士多德(Aristotle)的否定与反对.

《几何原本》的著名评述者普罗克拉斯(Proclus)评述直径分圆时,曾提出:

直径数$\{1,2,3,\cdots\}$ $\xleftrightarrow{\text{对应}}$ 对应圆分成的块数$\{2,4,6,\cdots\}$.

尔后由于他不承认无限集合存在而回避了上述问题的进一步深入讨论.



亚里士多德后期手稿《分析》中的一段，该文指出几何与逻辑之间的联系

1638 年伽利略(Galilei, G.)在他的《两种新科学对话》一书中曾指出两个不等长的线段上的点，可构成一一对应关系，进而指出

$$\{1,2,3,\cdots\} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \{1^2,2^2,3^2,\cdots\}.$$

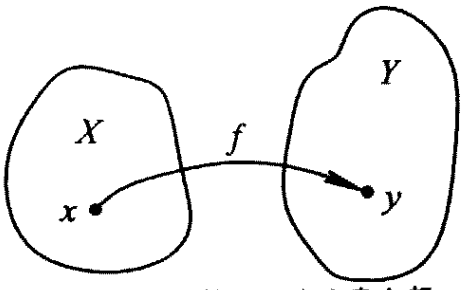
但他最后也以“不合常识”(违反了“整体大于部分”的公理)为由放弃了自己的想法与发现.

伽利略在比萨公开试验斜面落下的情况

高斯(Gauss,G.F.)认为“无穷只是一种说话的方式”,“在数学中却是不允许的.”

对无穷级数有过深入研究的哥西也认为“部分与整体构成一一对应的关系”是一种逻辑矛盾.

捷克数学家波尔察诺(Bolzano,B.)则是无限集合概念的维护者,他认为不同集合可以通过函数关系建立一一对应关系.

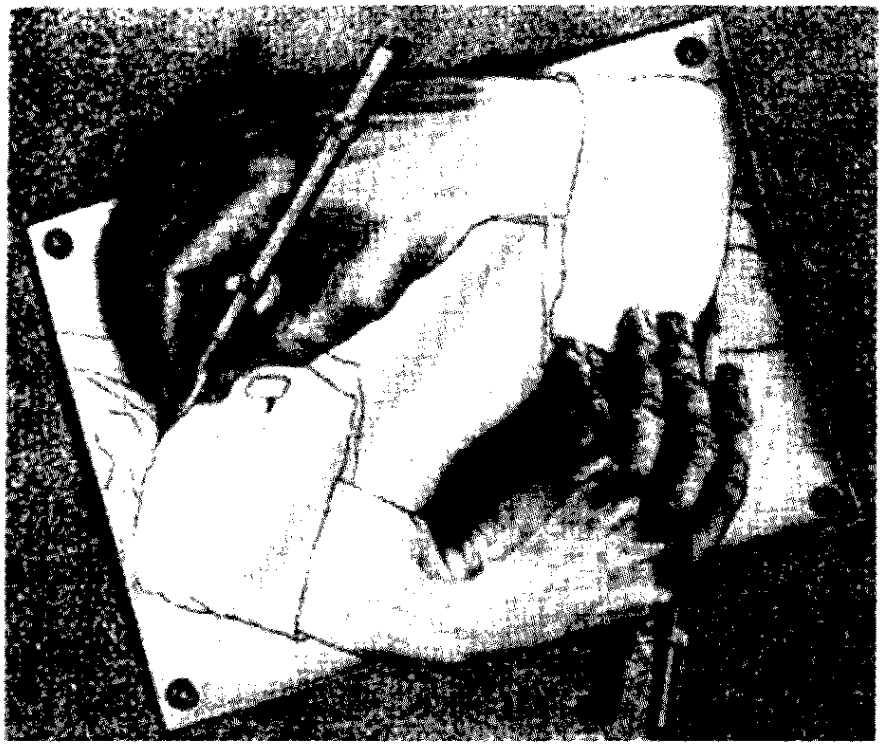


集合 X 与集合 Y 可通过函数 $y=f(x)$ 建立起一一对应关系

康托是由三角级数研究入手进而创立了“集合论”的.

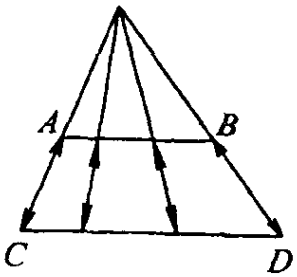
康托(Cantor,G.)

首先他认为:能与自己的部分建立一一对应关系的集合是无限集合.

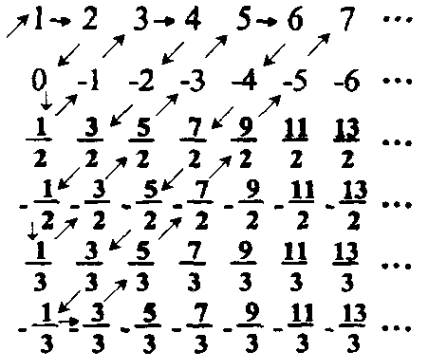


埃舍尔的《手画手》是集合悖论另外一种诠释,该悖论说:该 N 为所有不将自己当作元素的那些集合的集合,J 是所有把自己当作元素的那些集合的集合.今将 N 视为元素,$N \in N$ 还是 $N \in J$? 无论哪种情形都会产生矛盾.

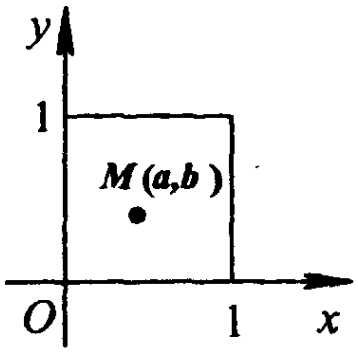
稍后他区别了:可列集与具有连续统势(基数)的集.且有理数集是可列的,实数集不可列.



不等长线段上 AB, CD 上的点一样多(一一对应)



有理数集是可数的(依图中箭头方向数下去)



单位正方形内点 $M(a,b)$ 其中 $a=0.a_1a_2a_3\cdots$, $b=0.b_1b_2b_3\cdots$ 则 M 写成 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$ 可与该实数一一对应(正方形与单位线段上点一样多)

此外他还证明了:直线上点与 n 维空间 R^n 上的点一样多.

为了刻画集合数量他引入了势(基数)和超穷数概念:

自然数集的势为 $\aleph_0$;实数集的势为 C,则 $C>\aleph_0$.

有基数 $\aleph_0$;的集合全部子集构成的新集合的势为 $2\aleph_0=\aleph_1$.

康托认为:在 $\aleph_0$ 与 $\aleph_1$;之间不存在其他集合的势(连续统假设).

换言之,基数比 $\aleph_0$ 大的集合基数是 $\aleph_1$.

在希尔伯特(Hilbert,D.)的23个著名数学问题中,第1个问题就是证明康托的连续统假设(连续统问题).

在传统的集合论框架内没有能解决这个问题.一些数学家认为:连续统问题原则上是不可解的.

只有在发现将数学概念归结为集合论概念的方法之后,只有阐明用集合论语言叙述的且可以作为现实生活中遇到的数学证明基的公理后,只有把逻辑推演方法形式化之后,才能给出一个精确的命题,然后来解决连续统假设的形式不可解性的问题.

形式不可解性即在ZF系统中,既不存在连续统假设的推演,也不存在它的否定式的推演.

康托"集合论"一问世便遭非议(这不禁使人想起当年希伯斯发现无理数时,受到毕达哥拉斯学派攻击的遭遇).他的老师,柏林大学教授数学直觉主义派代表人物克隆涅克尔(Kronecker,L.)指责该理论不是数学而是神秘主义.反对集合论的还有法国数学家庞加莱(Poincaré,H.)、克莱因(Klein,F.)和施瓦兹(Schwartz,H.A.)等.

克隆涅克尔等人对"集合论"攻击长达十几年(认为集合论是"一种疾病"、"雾上之雾"等等),这期间也使得康托失去了去柏林大学任教的机会.

在克隆涅克尔等人持续攻击下,康托经受不住刺激精神崩溃了.

1884年春天起,他已患上严重的抑郁症.

1918年1月6日,他默默地死在精神病院.

然而,集合论的产生对数学影响是巨大的,它是现代数学理论理所当然的组成部分.

英国数学家、逻辑学家、哲学家罗素(B.Russel)评价康托的工作"可能是这个时段能夸耀的最宏大的工作".

顺便讲一句:现代数学极有影响的团体布尔巴基(Bourbaki)学派正是引入了数学结构概念,且用它来统一数学.而数学结构主要是一些对象的集合,且运用公理化方法来定义的.

布尔巴基(Bourbaki)学派的学者们

他们编写的《数学原理》对现代数学产生着重大影响.

5.斯坦纳三元系解决的坎坎坷坷

1850 年,英国英格兰教会的一位教区长柯克曼(Kirkman,T.P.)提出这样一个有趣的问题:

一位女教师每天均带领她的 15 名女学生去散步,她要求学生们排成五行三列(每行 3 人)随她前进.问是否能给出一个一周内的安排,使得每两名学生在七天中都恰有一天排在同一行.

柯克曼 1806 年生于英格兰,27 岁毕业于都柏林大学,此后一直在英格兰教会中担任神职人员.他很喜欢数学,且在数学许多领域有所研究.其中他提出的上述问题被人们称为“柯克曼女

生问题”.

问题提出后引起英国数学界的注意,当时的大数学家希尔维斯特(Sylvester,J.J.)、凯莱(Cayley,A.)等都参加过讨论.

翌年,柯克曼在一家杂志上发表了他的解答:

将这15名女生从1到15编号,则一周内队列安排可为:

星期日:{1,2,3}、{4,8,12}、{5,10,15}、{6,11,13}、{7,9,14};

星期一:{1,4,5}、{2,8,10}、{3,13,14}、{6,9,15}、{7,11,12};

星期二:{1,6,7}、{2,9,11}、{3,12,15}、{4,10,14}、{5,8,13};

星期三:{1,8,9}、{2,12,14}、{3,5,6}、{4,11,15}、{7,10,13};

星期四:{1,10,11}、{2,13,15}、{3,4,7}、{5,9,12}、{6,8,14};

星期五:{1,12,13}、{2,4,6}、{3,9,10}、{5,11,14}、{7,8,15};

星期六:{1,14,15}、{2,5,7}、{3,8,11}、{4,9,13}、{6,10,12}.

同年英国数学家希尔维斯特和凯莱又提出：

希望给出一个连续 13 周的排列安排，不但使每周内的安排都符合原来的规定，而且使任意三名学生在全部 13 周内都恰有一天排在同一行(Sylvester 问题).

这个问题难度相当大(手算很困难)，直到 1974 年才由丹尼斯顿(Denniston)借助电子计算机给出第一个解：

将 15 名女生分别标号 $a,b,0,1,2,\cdots,12$，她们在十三周内的安排见下表：

星期	星期日	星期一	星期二	星期三
队列	$i\ \ a\ \ b$	$2+i\ \ 8+i\ \ b$	$5+i\ \ 12+i\ \ b$	$5+i\ \ 7+i\ \ b$
	$8+i\ \ 9+i\ \ 12+i$	$1+i\ \ 6+i\ \ a$	$4+i\ \ 10+i\ \ a$	$3+i\ \ 12+i\ \ a$
	$3+i\ \ 7+i\ \ 10+i$	$4+i\ \ 7+i\ \ 11+i$	$6+i\ \ 7+i\ \ 9+i$	$2+i\ \ 9+i\ \ 10+i$
	$2+i\ \ 6+i\ \ 11+i$	$3+i\ \ 5+i\ \ 9+i$	$1+i\ \ 2+i\ \ 3+i$	$1+i\ \ 8+i\ \ 11+i$
	$1+i\ \ 4+i\ \ 5+i$	$i\ \ 10+i\ \ 12+i$	$i\ \ 5+i\ \ 8+i$	$i\ \ 4+i\ \ 6+i$

星期四			星期五			星期六		
$4+i$	$9+i$	b	$1+i$	$10+i$	b	$3+i$	$6+i$	b
$2+i$	$5+i$	a	$9+i$	$11+i$	a	$7+i$	$8+i$	a
$6+i$	$8+i$	$10+i$	$5+i$	$6+i$	$12+i$	$5+i$	$10+i$	$11+i$
$1+i$	$7+i$	$12+i$	$3+i$	$4+i$	$8+i$	$2+i$	$4+i$	$12+i$
i	$3+i$	$11+i$	i	$2+i$	$7+i$	i	$1+i$	$9+i$

各周安排分别对应 i 取 $0,1,2,\cdots,12$，而数字加法结果均按模 13 取同余值.

与之有关的问题是斯坦纳三元系问题.

1853 年瑞士数学家斯坦纳(Steiner, J.)在研究四次曲线的二重切线问题时，提出了斯坦纳问题，它是属于组合设计(或称区组设计)问题，而组合设计又是“组合数学”的三大分支(另两支为图论和计数理论)之一，它要解决的问题是：

在给定的有限集合中，要求构造内其一些子集所组成的族，

使之满足某种形式的要求.这类问题貌似不难,但经世界各国不少著名数学家的努力,也未获得实质性的进展,从此成了组合数学中设计理论方面的一个重大难题.

1957年,吉林师范大学学生陆家羲借到孙泽瀛先生著的《数学方法趣引》,该书妙趣横生地介绍了十多个世界著名的数学难题.其中有趣的两道组合数学难题——柯克曼女生问题和斯坦纳三元系列问题,深深地吸引了陆家羲.

从此,他立志研究组合数学,四年如一日地潜心研究,一举于1961年,他大学毕业时,圆满地解决了柯克曼女生问题,取得了领先于世界的成就,创造了奇迹!十分遗憾的是,当时国内的数学杂志对此未予重视,数学界也似乎无人识货,使得年轻的陆家羲四处碰壁.

1971年,两位意大利学者雷·乔德赫利(Ray - Chaudhuri,D.R.)和威尔逊(Wilson,D.M.)抢先发表了他们的研究成果.尽管如此,陆家羲还是顽强地拼搏,于1981年再次取得了辉煌的成果——基本解决了斯坦纳三元系问题.1983年这一成果终于得到了国际组合数学界权威性刊物《组合》和加拿大两位组合数学专家的认同,论文得以发表(连续6篇,长达10万字,仅有6个阶数未定,后由泰尔林于1989年最后解决),为祖国赢得了荣誉.而他本人则积劳成疾,过早地被病魔夺去了生命.

1984年9月,组合数学界专家们认为:陆家羲的工作是可与1960年玻色等推翻"当 $t>1$ 时 $4t+2$ 阶正交拉丁方不存在"的欧拉猜想、1961年哈纳尼给出一类组合设计存在的充要条件可相媲美的成就.

参 考 文 献

[1] 华罗庚.数论导引.北京:科学出版社,1957

[2] 李 迪.中外数学史教程.福州:福建教育出版社,1993

[3] 吴文俊.世界著名数学家传记.北京:科学出版社,1995

[4] 让·迪厄多内著.沈永欢译.当代数学为了人类心智的荣耀.上海:上海教育出版社,1999

[5] 华罗庚.华罗庚科普著作选.上海:上海教育出版社,1984

[6] 华罗庚等.中国大百科全书(数学).北京:中国大百科全书出版社,1988

[7] 丁石孙.乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋.北京:北京大学出版社,1993

[8] 丁石孙.登山·赠币·红绿灯.北京:北京大学出版社.1997

[9] 李文林等.数学珍宝.北京:科学出版社,1998

[10] 梁宗巨.数学历史典故.沈阳:辽宁教育出版社.1992

[11] 华青、白水.数学家小辞典.上海:知识出版社.1987

[12] 邓宗琦.数学家辞典.武汉:湖北教育出版社.1990

[13] 日本数学会.数学百科辞典.北京:科学出版社,1984:1039

[14] 潘承洞、潘承彪.素数定理的初等证明.上海:上海科技出版社.1988

[15] U.杜德利,(周仲良译).基础数论.上海:上海科技出版社.1982

[16] 宁挺.说 e.福州:福建教育出版社,1985

[17] [日]堀场芳数.e 的奥秘.北京:科学出版社,1998

[18] 谈祥柏.数:上帝的宠物.上海:上海教育出版社,1996

[19] 21 世纪 100 个科学难题编写组.21 世纪 100 个科学难题.长春:吉林人民出版社,1998

[20] 解恩泽,徐本顺.世界数学家思想方法.济南:山东教育出版社,1983

[21] 华罗庚.优选学.北京:科学出版社,1984

[22] 梁宗巨.世界数学通史(上).沈阳:辽宁教育出版社,1996

[23] 伊恩·斯图尔特.自然之数.上海:上海科学技术出版社,1997

[24] J.阿达玛.初等几何教程(朱德祥译)上、下册.上海:上海科学技术出版社,1964

[25] Louis comtet(谭明术译).高等组合学.大连:大连理工大学出版社,1991

[26] C.贝尔热(陶懋颀等译).组合学原理.上海:上海科学技术出版社,1986

[27] I.Tomescu(栾汝书等译).组合学导论.北京:高等教育出版社,1985

[28] H.德里(罗保华等译).100个著名初等数学问题.上海:上海科学技术出版社,1982

[29] 张文忠.中学数学中的趣题.西安:陕西科学技术出版社,1989

[30] R.A.Brualdi(李盘林等译).组合学导引.武汉:华中工学院出版社,1982

[31] 丘维声.从 n 后问题谈起.自然杂志.1978(9)

[32] I.Stewar.费尔马双平方和定理.科学.1991(6)

[33] N.Hegyvari.一类无理十进小数.数学译林,1994,13(3):256~257

[34] 谈祥柏.伯努利数.科学,1999(3)

[35] 单墫.正方体的分解.科学,1998(6)

[36] 单墫.十三个球的问题.科学,1997(5)

[37] 吴振奎.高等数学复习及试题选讲.沈阳:辽宁科技出版社,1984:216~218

[38] 吴振奎.斐波那契数列.沈阳:辽宁教育出版社,1987

[39] 吴振奎.中学数学中的证明方法(修订版).沈阳:辽宁教育出版社,1985

[40] 吴振奎.数学中的推广、反例及不可能问题.沈阳:辽宁教育出版社,1993(上海教育出版社2003年修订再版,书名《数学的创造》)

[41] 吴振奎等.数学美学初探.天津:天津教育出版社,1997

[42] 吴振奎,俞晓群.今日数学中的趣味问题.天津:天津科技出版社,1990

[43] 吴振奎.运筹学概论.北京:中国经济出版社.1997

[44] 吴振奎,吴旻.名人·趣题·妙解.天津:天津教育出版社,2001

[45] 吴振奎,高等数学解题方法和技巧.沈阳:辽宁教育出版社,1986
[46] 吴振奎,数学解题的特殊方法.沈阳:辽宁教育出版社,1984
[47] 吴振奎.费尔马猜想(大定理)获证.中等数学,1997(4)
[48] 吴振奎.调和级数、幂级数与黎曼猜想.中学数学,1999(6)
[49] 吴振奎.与调和级数有关的某些级数的敛散问题.天津商学院学报,1987(1)
[50] 吴振奎.自然数方幂和与伯努利数.中等数学,2000(2)、(3)
[51] 吴振奎.圆周率 π.中等数学,2000(5)
[52] 吴振奎.数 e.中等数学,2000(6)
[53] 吴振奎.Euler 常数 0.5772156….中等数学,2001(1)
[54] 吴振奎.黄金数 0.618….中等数学,2001(5)
[55] 吴振奎.谈谈质(素)数表达式.中等数学,1999(2)
[56] 吴振奎.麦森素数与完全数.中等数学,1999(4)
[57] 吴振奎.费尔马素数与尺规作图.中等数学,1999(3)
[58] 吴振奎.漫话分形.中等数学,1998(3)
[59] 吴振奎.混沌平话.数学通讯,1999(2~4)
[60] 吴振奎.艰涩的反例.数学通讯,1998(12)
[61] 吴振奎.分(碎)形的思考.数学传播,2003(1)
[62] 吴振奎.从 Iucass 的一则方程说起.数学传播,2003(2)